

# ANNALEN DER PHYSIK.

HERAUSGEBEN UND FORTGEFÜHRT VON

F. A. G. SEM, L. W. GILBERT, J. C. FOCKENSDORFF, G. v. H. WILHELM, P. MEIER.

VIERTE FOLGE.

Band 48. Heft 6.

DER GANZEN REIHE 248. BAND 4. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1914.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIO BARTEL  
DÜRZENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den  
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis des Heftes  
50 Pf. (in 2 Bänden) 1.00 Mark. (In 4 Bänden) 2.00 Mark.)*  
*(Anzeigen von 20 Zeilen 1.00 Mark.)*

# Inhalt.

	Seite
1. G. Rämelin. Über die Wiedervereinigung von Gasionen . . . . .	821
2. F. Paschen. Ultrarot-Monochromatfilter . . . . .	858
3. Kobayashi-Iwao. Über den Einfluß der Dämpfung auf die Beugung elektrischer Wellen an einem dielektrischen Zylinder . . . . .	861
4. Artur Rosenthal. Aufbau der Gastheorie mit Hilfe der Quasikugelhypothese . . . . .	894
5. Walter Küpper. Einfluß von Röntgen-, ultraviolett, Bequerelstrahlen und des elektrischen Wechselfeldes auf die Schallgeschwindigkeit in Gasen . . . . .	905
6. B. Weinstein. Zu Minkowskis Mechanik. Die Weltkonstante, die Systemmechanik . . . . .	929
7. W. Wien. Über die Frage, ob die Kanalstrahlen bei der Lichterregung Bewegungsenergie übertragen . . . . .	958

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Fleischerrieg 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortgeschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

## ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 43.

---

1. *Über die Wiedervereinigung von Gastonen;*  
*von G. Rümelin.*

---

## § 1. Einleitung.

Die Erscheinungen der Elektrizitätsleitung in dichten Gasen finden heutzutage durch die Ionentheorie eine einheitliche und übersichtliche Erklärung. Als Träger des elektrischen Stromes durch das Gas sind kleine positiv und negativ geladene Teilchen erkannt, die sich mit so großer Reibung im Gase bewegen, daß die beschleunigende Wirkung der Kräfte, die auf diese Teilchen ausgeübt wird, vernachlässigt werden kann, so daß die Gasionen sich mit einer der momentan bestehenden elektrischen Feldstärke proportionalen Geschwindigkeit bewegen.

Die durch die Ionisatoren in einem Gase erzeugten Ionen bleiben nicht dauernd als solche erhalten; die Leitfähigkeit des Gases steigt nur bis zu einem bestimmten, von der Intensität des Ionisators abhängigen Betrag an, wenn dieser dauernd einwirkt. Der Ionisationszustand einer Gasmasse ist demnach durch die Ionenerzeugung und durch das Verschwinden von Ionen in demselben bestimmt. Drei Ursachen bewirken nun das Verschwinden der Ionen: die Fortführung derselben durch den elektrischen Strom, die Diffusion einer Ionenart von Stellen höherer zu Stellen niedriger Konzentration, und die Wiedervereinigung positiver und negativer Ionen zum elektrisch neutralen Molekül.

Es ist als eine Hauptaufgabe der Ionentheorie zu bezeichnen, die Erscheinungen der Elektrizitätsleitung in dichten Gasen zu verfolgen, um aus den erhaltenen Resultaten Schlüsse über die Eigenschaften der Ionen zu ziehen; es sind also die in jedem Falle auftretenden Ionen durch gewisse Zahlenwerte, die Ionenkonstanten, zu charakterisieren.

Die in Betracht zu ziehenden Ionenkonstanten sind nun  
 a) die Masse und die Ladung eines einzelnen Ions;  
 b) die Beweglichkeit einer Ionenart, d. i. die Geschwindigkeit, die ihr durch ein Potentialgefälle von 1 Volt/cm erteilt wird;

c) der Diffusionskoeffizient einer Ionenart, die Anzahl der senkrecht durch 1 cm hindurchtretenden Ionen, dividiert durch das Konzentrationsgefälle in dieser Richtung;

d) die Wiedervereinigungskonstante  $\alpha$  zweier Ionenarten. Angenommen, es befinden sich  $n$  Ionen beiderlei Vorzeichens im Kubikzentimeter zur Zeit  $t$ , während zur Zeit  $t = 0$  je  $n_0$  vorhanden waren, dann liefert das Massenwirkungsgesetz die Gleichungen

$$(1) \quad \frac{dn}{dt} = -\alpha n^2; \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n_0} = \alpha t.$$

Diese Beziehungen sind bis jetzt beinahe allen experimentellen und theoretischen Arbeiten, die sich mit der Wiedervereinigung von Ionen in dichten Gasen befassen, zugrunde gelegt worden; es unterliegt keinem Zweifel, daß wenigstens ein großer Teil der in einem Gase existierenden Leitfähigkeit nach den Gleichungen (1) abklingt, wenn der Ionisator zur Zeit  $t = 0$  zu wirken aufhört.

Die zur Messung der Koeffizienten der Wiedervereinigung bisher angewandten Methoden lassen sich, wie eine von F. Harms<sup>1)</sup> gegebene Übersicht zeigt, in folgende Gruppen einteilen:

1. Methoden, bei denen das Abklingen der Ionisation nach dem Aufhören der Ionisatorwirkung beobachtet, das Wiedervereinigungsgesetz also direkt geprüft und daraus die Konstante  $\alpha$  bestimmt wird.

2. Methoden, bei denen  $\alpha$  aus der Ionenkonzentration  $n$  im Gleichgewichtszustande und aus der Ionisierungsstärke  $q$  vermöge der Beziehung

$$(2) \quad q = \alpha n_0^2$$

berechnet wird. Hierher gehört die von J. J. Thomson und Rutherford angegebene Methode,  $\alpha$  mittels der Charakteristik der unselbständigen Strömung aus dem Sättigungsstrom und

1) F. Harms, Jahrbuch d. Radioelektr. 3. p. 321. 1906.



aus dem Strome, der bei einer sehr kleinen Feldstärke durch das Gas fließt, zu berechnen.

3. Indirekte Methoden, bei denen Beziehungen zu anderen Ionenkonstanten benutzt werden. Bei den Methoden dieser Gruppe wird die Zeit, während der die Ionen Gelegenheit haben, zu rekombinieren, variiert durch die Änderung der elektrischen Feldstärke, in der sich die Gasionen befinden.

Zu dieser Gruppe gehört zunächst eine von Langevin stammende Methode. In einem Gasraum, der unter Einwirkung eines elektrischen Feldes steht, wird plötzlich — etwa mittels einer momentan betriebenen Röntgenröhre — eine bestimmte Ionenkonzentration erzeugt; die Ionen werden teilweise an den Elektroden abgeschieden, teilweise durch Rekombination aus dem Gase entfernt. Aus der Funktion, die die an einer Elektrode abgeschiedene Elektrizitätsmenge als Funktion der Feldstärke wiedergibt, wird die Wiedervereinigungskonstante berechnet.

Die zweite hier anzuführende Methode ist die von Riecke, die die Konstante  $\alpha/e$  aus dem Verlauf der Charakteristik des Stromes, und zwar aus dem Anwachsen des Stromes bis zum Sättigungsstrom zu berechnen gestattet.

Für Ionen, die in trockener, staubfreier Luft von Atmosphärendruck und Zimmertemperatur durch verschiedene Ionisatoren erzeugt wurden, sind nach mehreren Methoden die Werte der Wiedervereinigungskonstanten  $\alpha/e$  ( $e$  = Ladung eines Gasions) bestimmt worden, wobei sich, wie nachstehende Tabelle zeigt, befriedigende Übereinstimmung ergeben hat:

Beobachter	$\alpha/e$ in e. s. e.	Ionisator
Townsend <sup>1)</sup>	3420	Röntgenstrahlung
Mc Clung <sup>2)</sup>	3380	"
Langevin <sup>3)</sup>	3200	"
Retschinsky <sup>4)</sup>	4140	$\alpha$ -Strahlen
	4200	
Hendren <sup>5)</sup>	3500	"
Erikson <sup>6)</sup>	3300	$\beta + \gamma$ -Strahlen

1) J. S. Townsend, Phil. Trans. 193. p. 129. 1900.

2) R. Mc Clung, Phil. Mag. 3. p. 283. 1902.

3) P. Langevin, Compt. rend. 137. p. 177. 1903.

4) T. Retschinsky, Diss. Göttingen 1905.

5) L. L. Hendren, Phys. Rev. 21. p. 314. 1905.

6) H. A. Erikson, Phil. Mag. 18. p. 328. 1909.

Wenig befriedigend sind dagegen die Angaben, die über die Abhängigkeit der Wiedervereinigungskonstante vom Druck vorliegen; es ist ein Hauptziel der vorliegenden Arbeit, zur Klärung dieser Frage einen Beitrag zu liefern.

Die Versuche von McClung ergaben Unabhängigkeit vom Druck zwischen 3 und 0,125 Atm.; Langevin, Retschinsky und Hendren fanden Abnahme von  $\alpha/e$  mit sinkendem Druck; einige der Werte, die diese Verfasser angeben, sind in folgender Tabelle enthalten:

Retschinsky		Langevin		Hendren	
per mm Hg	$\alpha/e$	per mm Hg	$\alpha/e$	per mm Hg	$\alpha/e$
700	4004	760	3200	760	3500
600	3625			450	2650
500	3271			250	2070
400	2977	375	1500	150	1750
300	2693			100	1550
200	2606	152	600		

Die Unterschiede, die hier zutage treten, können darin ihren Grund haben, daß bei der Ionisation durch  $\alpha$ -Strahlen kompliziertere Verhältnisse bezüglich der Wiedervereinigung obwalten, auf die Bragg und Kleeman<sup>1)</sup> zuerst aufmerksam gemacht haben. Nach ihrer Auffassung kommt neben der durch die Gleichung (1) gegebenen gewöhnlichen Wiedervereinigung ein Verschwinden von Ionen dadurch zustande, daß die von den Strahlen getroffenen Atome zum Teil nur halb dissoziiert werden, so daß diese letzteren sich sofort wieder zum neutralen Molekül zurückbilden, falls sie nicht durch ein starkes elektrisches Feld auseinandergerissen werden. Die „initial recombination“ ist praktisch merkbar nur bei Ionisation durch  $\alpha$ -Strahlung. Moulin<sup>2)</sup> vertritt eine andere, von Langevin herrührende Auffassung der Initialrekombination; er stellt sich vor, daß die von einer  $\alpha$ -Partikel erzeugten Ionen alle in einem, die Bahn der  $\alpha$ -Partikel eng umschließenden Zylinder erzeugt werden — *ionisation en colonnes* —, wegen der großen Ionendichte erfolgt innerhalb einer Kette von Ionen die Wiedervereinigung bedeutend schneller als zwischen Ionen, die verschiedenen Ketten angehören.

1) W. H. Bragg u. R. D. Kleeman, Phil. Mag. 11. p. 466. 1906.

2) M. Moulin, Thèses, Paris 1910.

Die Initialrekombination hängt vom Druck ab, mit Erniedrigung des Druckes wird sie schwächer. Man wird, um die Abhängigkeit der gewöhnlichen Wiedervereinigung vom Druck zu untersuchen, am besten die Initialrekombination durch den Verzicht auf  $\alpha$ -Strahlen als Ionisator zunächst ausschließen; dann aber erscheint es wünschenswert, nach Methoden zu suchen, die den Einfluß der gewöhnlichen und der anfänglichen Wiedervereinigung *getrennt* beobachten, d. h., den Koeffizienten der gewöhnlichen Wiedervereinigung auch bei vorhandener Initialrekombination zu messen gestatten.

Die zitierten Messungen der Wiedervereinigungskonstanten, die mit Benutzung von  $\alpha$ -Strahlen gewonnen worden sind, stimmen nur deshalb mit den übrigen Bestimmungen überein, weil mit ganz ungewöhnlich starker Ionisation gearbeitet worden war; wenn man schwächere Ionisationen untersucht, kann man Werte für die „Konstante“ erhalten, die mehrere tausendmal größer sind, als die angegebenen.

Bei starker Ionisation tritt nämlich die Initialrekombination gegenüber der gewöhnlichen Wiedervereinigung mehr zurück, weil die Ionisation eine homogenere wird. Legen wir die Langevinsche Auffassung der Initialrekombination zugrunde, daß mit Vermehrung der Dichte der Ionenreihen, die durch je einen  $\alpha$ -Strahl erzeugt werden, die Wahrscheinlichkeit der Wiedervereinigung von Ionen *verschiedener* Reihen wächst. Ist die mittlere Ionenkonzentration im Gasraume ebensogroß wie die mittlere Konzentration in den einzelnen Reihen, erfüllen also diese praktisch den ganzen Gasraum, dann befinden sich in der Umgebung eines Ions sehr viele entgegengesetzten Vorzeichens, der Zusammenstoß mit einem der gleichen Kolumne angehörigen ist nicht mehr wahrscheinlicher, wie der mit einem anderen beliebigen Ion: die Voraussetzungen, die bei der Anwendung des Massenwirkungsgesetzes auf die Wiedervereinigung gemacht werden, sind also dann erfüllt.

Eine Hauptfehlerquelle bei Messungen der Wiedervereinigungsgeschwindigkeit besteht darin, daß stets neben dem Vorgang der Rekombination ein weiterer Vorgang, Diffusion und Adsorption der Ionen an den Gefäßwänden stattfindet, so daß die Wiedervereinigungsgeschwindigkeit zu groß erscheint. Man

ist darauf angewiesen, durch möglichst große Dimensionierung der Versuchsgefäße den auf Diffusion fallenden Anteil des Ionenverlustes herabzudrücken. Die verschiedenen oben besprochenen Methoden zur Bestimmung von  $\alpha$  sind nun nicht alle gleich empfindlich gegen Diffusionsfehler.

Hauptsächlich sind es die oben in Gruppe 2. genannten Methoden, bei denen die Konzentration der Ionen im Gleichgewichtszustande zur Messung dient. Da in dem Gase nämlich nicht nur in bezug auf die Wiedervereinigung, sondern auch in bezug auf die Diffusion Gleichgewicht zwischen Ionenerzeugung und Ionenverlust herrscht, so ist an den der Gefäßwand benachbarten Stellen, an denen ein merklicher Bruchteil der erzeugten Ionen wegdiffundiert, die Ionenkonzentration kleiner als der durch  $q = \alpha n_0^2$  gegebene Wert; das in die Messung eingehende, über das Volum des Gefäßes zu erstreckende Integral über  $n_0$  wird zu klein,  $\alpha$  infolgedessen zu groß gefunden.

Der Einfluß der Diffusion bei der Methode 1. kann dadurch beliebig herabgedrückt werden, daß man die Abklingzeiten kurz wählt, d. h. bei starker Ionisation arbeitet. Dies verursacht aber die große experimentelle Schwierigkeit, daß die Strahlenquelle sehr rasch zu wirken aufhören, d. h. entfernt werden muß. Bei Verwendung ruhender Gase ist dies nur bei Ionisation durch Röntgenstrahlen zu erreichen, die aber den großen Nachteil haben, daß sie sich nur schwer mit zeitlich konstanter Intensität herstellen lassen.

Praktisch vollständig vermieden wird der Einfluß der Iondiffusion bei den indirekten Methoden, da die Ionen nur sehr kurze Zeit frei existieren, weil sie durch die starken elektrischen Felder rasch an den Elektroden abgeschieden werden.

Man wird es als wünschenswert bezeichnen dürfen, eine Meßmethode für die Wiedervereinigungsgeschwindigkeit zu finden, bei der die Ionen während kurzer Zeit im Gase frei existieren, aber nicht durch ein elektrisches Feld relativ gegeneinander bewegt werden; die oben besprochene Auffassung von Bragg über die Initialrekombination legt doch nahe, zu vermuten, daß der Vorgang der Wiedervereinigung durch ein elektrisches Feld gestört wird. Die gewünschte Methode bietet sich, wenn man den Anstieg der Ionenkonzentration nach dem

Einsetzen der Strahlung beobachtet. Dieser Anstieg hängt wie das Abklingen nach dem Aufhören der Strahlung, von der Wiedervereinigungskonstante ab. Um das plötzliche Einsetzen der Strahlung experimentell zu realisieren, braucht man nicht die zuerst entfernte Strahlenquelle (Radiumpräparat) an den Ort zu bringen, von dem sie das Gas des Meßkondensators ionisiert; man kann dasselbe erreichen, indem man die Strahlenquelle an ihrem Ort dauernd läßt, die Ionen aber, die sie erzeugt, zunächst durch eine zur Sättigung hinreichende E.M.K. entfernt, und nun die E.M.K. plötzlich abschaltet. Legt man nach einer kurzen, gemessenen Zeit die E.M.K. wieder an, so werden von den in der Zwischenzeit erzeugten Ionen die abgeschieden, die der Wiedervereinigung entgangen sind. Es liegt bei der Kleinheit der im Falle nicht sehr starker Ionisation auf diese Weise abscheidbaren Elektrizitätsmenge nahe, ein Repetierverfahren anzuwenden, den Prozeß zu wiederholen und ein Multiplum dieser Menge zu messen.

## § 2. Theorie der Versuchsanordnung.

Werden in dem Raume des Meßkondensators  $q$  Ionenpaare im Kubikzentimeter in der Sekunde erzeugt, und wird angenommen, daß diese Ionen ausschließlich durch Rekombination wieder zugrunde gehen, so gilt, da im Kubikzentimeter gleichviel positive und negative Ionen enthalten sind, die Beziehung:

$$(1) \quad \frac{dn}{dt} = q - \alpha n^2.$$

Integriert man mit der Anfangsbedingung  $t = 0, n = 0$ , so erhält man die Beziehung, die den Anstieg der Ionenkonzentration mit der Zeit darstellt, wenn zur Zeit  $t = 0$  das Gas keine Ionen enthielt und von da ab mit konstanter Stärke ionisiert wurde:

$$(2) \quad n = \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \frac{e^{2\sqrt{q\alpha}t} - 1}{e^{2\sqrt{q\alpha}t} + 1}.$$

Stellt man zur Zeit  $t_1$  plötzlich ein starkes Feld zwischen den Elektroden des Meßkondensators her, so wandert die Anzahl Ionen eines Vorzeichens, die sich nach (2') gebildet hat,

ohne daß Rekombination eintritt, an die eine isolierte Elektrode. Bleibt die Ionisierung  $t_2$  sec lang in gleicher Stärke weiter bestehen, dann beträgt die aus dem ganzen Volumen  $V$  bis zur Zeit  $t = t_1 + t_2$  abgeschiedene Elektrizitätsmenge ( $\epsilon =$  Ladung eines Ions)

$$(3) \quad E = V\epsilon \left[ \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \frac{e^{2\sqrt{q\alpha}t_1} - 1}{e^{2\sqrt{q\alpha}t_1} + 1} + q t_2 \right].$$

Wenn nun zur Zeit  $t = t_1 + t_2$  das Feld plötzlich wieder abgeschaltet wird, dann ist in diesem Augenblick die in den einzelnen Teilen des Meßkondensators herrschende Ionenkonzentration um so geringer, je schneller die fortwährend erzeugten Ionen durch das elektrische Feld entfernt worden waren. Setzen wir zur Zeit  $t = t_1 + t_2$  vorläufig wieder  $n = 0$ , so können wir durch Wiederholung des Prozesses die Elektrizitätsmenge  $E$  beliebig oft hintereinander zur Abscheidung bringen.

Die Prüfung der Beziehung (3) gestaltet sich experimentell am einfachsten, wenn das Verhältnis  $t_1:t_2$  konstant gelassen wird. Eine mit verschiedenen Geschwindigkeiten rotierende Kontaktvorrichtung, die während eines bestimmten Bruchteils der Umlaufdauer das elektrische Feld anlegt, entspricht diesem Zweck.

Es sei die Umlaufdauer  $t = t_1 + t_2$ ;  $t_1 = (1 - \gamma)t$ ;  $t_2 = \gamma t$ ,  $\gamma$  eine Apparatkonstante. Wird die Abscheidung der Elektrizitätsmenge  $E$  oft hintereinander wiederholt, und die infolge der Zuführung von Elektrizitätsmengen erfolgende Potentialänderung mit einem trägen Meßinstrument verfolgt, so kommt das bewegliche System in den Pausen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abscheidungen nicht in Ruhe; ist die Einstellungsdauer groß gegenüber dieser eben genannten Zeit, so bewegt sich die Nadel gleichförmig und zeigt die durchschnittlich pro Sekunde aufgefangene Menge an.

Mit obigen Bezeichnungen wird diese Menge, die sich wie ein Ionisationsstrom messen läßt,

$$(4) \quad i = V\epsilon \left[ \frac{1}{t} \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \frac{e^{2\sqrt{q\alpha}t_1} - 1}{e^{2\sqrt{q\alpha}t_1} + 1} + q\gamma \right]$$

oder, indem man die der Umlaufgeschwindigkeit  $s$  proportionale Variable

$$(5) \quad x = \frac{1}{2(1-\gamma) t \sqrt{q \alpha}}$$

einführt, und berücksichtigt, daß der Sättigungsstrom bekanntlich durch  $J = \varepsilon q V$  gegeben ist:

$$(6) \quad \frac{i}{J} = 2(1-\gamma)x \frac{\frac{1}{e^x - 1}}{\frac{1}{e^x + 1}} + \gamma = y_2.$$

Es ist also

$$(7) \quad \frac{i/J - \gamma}{2(1-\gamma)} = x \frac{\frac{1}{e^x - 1}}{\frac{1}{e^x + 1}} = y_1.$$

Setzt man homogene Ionisation voraus, so fordert die Theorie, daß sich die Beobachtungen der bei verschiedenen Rotationsgeschwindigkeiten der Kontaktvorrichtung abgeschiedenen Elektrizitätsmengen durch die Gleichung (6) darstellen lassen, mit anderen Worten wenn  $i/J$  als Ordinate, die Umlaufgeschwindigkeit  $s$  als Abszisse aufgetragen werden, so soll es möglich sein, die so entstehende Kurve durch Änderung des Maßstabes der Abszisse mit derjenigen zur Deckung zu bringen, die nach Gleichung (6)  $i/J$  als Funktion von  $x$  darstellt.

Die Werte der Funktionen  $y_1$  und  $y_2$  sind in Fig. 1 graphisch dargestellt,  $y_2$  mit dem Wert von  $\gamma$ , der dem benutzten Apparate entspricht. Für kleine Werte von  $x$  (praktisch, d. h. auf 1 Proz. genau,  $0 < x < 0,2$ ) gelten die Näherungswerte

$$(8) \quad \begin{cases} y_1' = x \left( 1 - 2e^{-\frac{1}{x}} \right) \\ y_2' = \gamma + 2(1-\gamma)x \left( 1 - 2e^{-\frac{1}{x}} \right) \\ \quad = \gamma + \frac{s}{\sqrt{q \alpha}} \left( 1 - e^{-\frac{2(1-\gamma)Vq\alpha}{s}} \right) \end{cases}$$

während für große Werte von  $x$  (praktisch für  $1,2 < x < \infty$ ) die Näherungen



$$(9) \quad \begin{cases} y_1'' = \frac{1}{2} - \frac{1}{12x^3}, \\ y_2'' = 1 - \frac{1-\gamma}{12x^3} = 1 - \frac{(1-\gamma)^3 q \alpha}{3 s^2} \end{cases} \quad \text{gelten.}$$

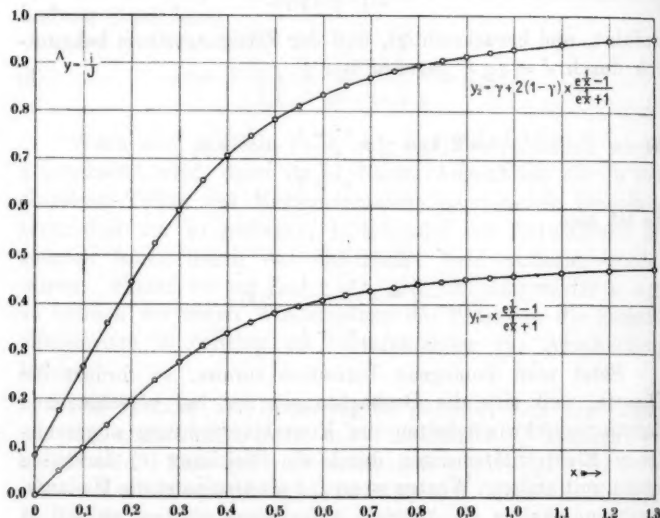


Fig. 1.

Die aufgefundenen Mengen müssen also bei kleinen Umdrehungsgeschwindigkeiten, wo

$$y_2' = \gamma + 2(1-\gamma)x = \gamma + \frac{s}{\sqrt{q\alpha}}$$

linear mit dieser zunehmen; aus der Neigung der Kurve  $\vartheta$  gegen die Abszissenachse findet man

$$(10) \quad \frac{\alpha}{s} = \frac{V}{J} \operatorname{ctg}^2 \vartheta.$$

Bei großer Umdrehungszahl soll sich die aus dem Gase pro Sekunde abscheidbare Elektrizitätsmenge dem Werte des Sättigungsstromes nähern; die Abweichung beider Größen soll dem Quadrat der Umlaufgeschwindigkeit proportional sein.

Es bleibt noch zu untersuchen, wie der Umstand die Formeln beeinflusst, daß die Anfangskonzentration der Ionen bei Beginn jeder Periode nicht genau Null ist.

Integriert man 1' mit der Anfangsbedingung, daß für  $t = 0$ ,  $n = n'$  sein soll, so kommt

$$(2') \quad n = n_0 \frac{e^{\frac{2\sqrt{q}\alpha t}{e}} - C}{e^{\frac{2\sqrt{q}\alpha t}{e}} + C}; \quad C = \frac{1 - \frac{n'}{n_0}}{1 + \frac{n'}{n_0}} \quad n_0 = \sqrt{\frac{q}{\alpha}}$$

wenn wir voraussetzen, daß die Anfangskonzentration  $n'$  klein gegenüber der Gleichgewichtskonzentration  $n_0$  ist.

Die Elektrizitätsmenge, die pro Umdrehung erhalten wird, ist dann:

$$(3') \quad E = F\varepsilon \left[ n_0 \frac{e^{\frac{2(1-\gamma)\sqrt{q}\alpha t}{e}} - C}{e^{\frac{2(1-\gamma)\sqrt{q}\alpha t}{e}} + C} + q\gamma t - n' \right].$$

Das letzte Glied der Klammer rührt daher, daß nicht alle während  $t_2$  produzierten Ionen abgeschieden werden, sondern diejenigen im Gasraum zurückbleiben, welche so spät und in solcher Entfernung von den Elektroden entstehen, daß sie nicht mehr vor dem Verschwinden der E.M.K. die Elektroden erreichen.

Wir wollen nun wieder Näherungswerte für die modifizierten Ausdrücke für  $i$  bei kleinen und großen Umdrehungsgeschwindigkeiten  $s$  ableiten.

Für große Werte von  $t$ , also kleine  $s$ , erhält man aus (3')

$$E = F\varepsilon \left[ n_0 \left( 1 - \frac{n'}{n_0} - 2e^{-\frac{2(1-\gamma)\sqrt{q}\alpha}{s}} \right) + q\gamma \right]$$

und

$$(8') \quad \frac{i}{J} = \gamma + \frac{s}{\sqrt{q}\alpha} \left( 1 - \frac{n'}{n_0} - 2e^{-\frac{2(1-\gamma)\sqrt{q}\alpha}{s}} \right).$$

Die modifizierten  $y, s$ -Kurven gehen also ebenfalls durch den Punkt  $\gamma$  der  $Y$ -Achse hindurch; die anfängliche Steigung derselben ist jedoch, wie der Vergleich von (8') mit (8) lehrt, verringert; der Wert von  $\alpha/e$  nach der ersten der Formeln (10) wird zu groß gefunden; der Korrektionsfaktor ist  $1 - 2\frac{n'}{n_0}$ , für  $n_0$  genügt die aus (8) zu berechnende Annäherung. Das die Krümmung der Kurve bewirkende Exponentialglied ist dasselbe wie in (8), es macht sich also erst ebenso spät wie dort bemerkbar.

Andererseits erhält man für große  $s$  und  $x$ , kleine  $t$  den Ausdruck

$$E = V\varepsilon \left[ n_0 \left\{ \frac{\frac{1}{e^x}(1+\zeta) - (1-\zeta)}{\frac{1}{e^x}(1+\zeta) + (1-\zeta)} - \zeta \right\} + q\gamma t \right],$$

wobei  $\zeta$  zur Abkürzung  $= n'/n_0$  gesetzt ist.

Durch Entwicklung nach  $x$  und  $\zeta$  kommt bei Berücksichtigung der Glieder bis zur dritten Ordnung inkl.

$$E = V\varepsilon \left[ n_0 \left\{ \frac{1}{2x} - \frac{\zeta^2}{2x} - \frac{1}{24x^3} - \frac{\zeta}{4x^2} \right\} + q\gamma t \right]$$

und, indem man wieder  $s$  einführt,

$$(9') \quad \frac{i}{J} = 1 - \frac{(1-\gamma)n'^2}{n_0^2} - \frac{n'}{n_0} \frac{(1-\gamma)\sqrt{q\alpha}}{s} - \frac{(1-\gamma)^2 q\alpha}{3s^2}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich in der Form wesentlich von (9); auffallend ist zunächst, daß das absolute Glied der Entwicklung nicht  $= 1$  ist, daß für  $t = 0$  nicht streng  $i = J$  ist; man sieht aber ein, daß dies so sein muß, wenn man beachtet, daß der aus Gleichung (2) abzuleitende Wert von  $dn/dt$  zu der Zeit, wo  $n = n'$  ist, nicht mehr so groß wie zur Zeit  $t = 0$  ist. Praktisch ist, wie wir sehen werden, der Unterschied der Reihen (9') und (9) kleiner als die Beobachtungsfehler, so daß er vernachlässigt werden kann.

Wir müssen nun durch eine Überschlagsrechnung eine Schätzung des Wertes  $\zeta = n':n_0$  zu erhalten suchen.

Wir betrachten an der Stelle  $x$  des Ionisierungsgefäßes ein Volumelement vom Querschnitt 1 und der Höhe  $dx$ , die Kraftlinien seien einander und zur  $x$ -Richtung parallel, die Elektroden seien bei  $x = 0$  und  $x = l$ .

Die Beweglichkeit der einen betrachteten Ionenart sei  $k$  cm<sup>2</sup>/Voltsec; die Feldstärke  $F$  Volt/cm wirke von der Zeit  $t = 0$  bis zur Zeit  $t = t_2$ ; die Ionisierungsstärke  $q$  wirke ebenfalls von  $t = 0$  an.

Die in dem Element erzeugten Ionen kommen nicht alle zur Abscheidung, da ein Teil derselben, die kurz vor  $t_2$  entstehen, nicht mehr die Elektrode erreichen. Sind die letzten Ionen, die die Elektrode bei  $x = 1$  erreichen, zur Zeit  $t_2 - \delta$  entstanden, so ist, da die Geschwindigkeit der Ionen durch  $K \cdot F$  gegeben ist,

$$\delta = \frac{l-x}{K \cdot F} \text{ sec},$$

die insgesamt an der Elektrode abgeschiedene Ionenzahl ist

$$\int_0^l q dx \left( t_2 - \frac{l-x}{KF} \right) = q l t_2 - \frac{q l^2}{2KF}.$$

In das Volumelement sind zur Zeit  $t = t_2$  Ionen gelangt, die früher produziert worden sind; teilt man den Raum von  $X = 0$  bis zur Stelle  $x$  in lauter gleiche Volumelemente, so gehen in das Element bei  $X$  die aus allen anderen stammenden Ionen hinein, die während der Zeit  $dt = dx/KF$  entstanden sind; die zur Zeit  $t = t_2$  in dem Element herrschende Ionenkonzentration ist demnach

$$\int_0^x \frac{q}{KF} dx = \frac{xq}{KF};$$

sie ist nicht räumlich konstant, für unseren Zweck der Berechnung einer Korrektur ist es wohl angängig, statt dieses Wertes den Mittelwert über das Volumen der ionisierten Gasmasse zu nehmen, so daß

$$n' = \frac{ql}{2KF}$$

resultiert.

Der Wert von  $\zeta = n'/n_0$  wird dann

$$\zeta = \frac{l\sqrt{q\alpha}}{2KF}.$$

$\sqrt{q\alpha}$  ist das Reziproke der Zeit, innerhalb der die Ionisation auf den halben Wert sinkt.

Setzt man, wie es einigen der ausgeführten Versuche entspricht:

$$\sqrt{q\alpha} = 1, \quad K = 1,5 \frac{\text{cm}^2}{\text{Volt sec}}, \quad F = 500 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}},$$

so wird  $\zeta = 0,002$ ; die durch 0 setzen von  $\zeta$  entstehenden Fehler sind kleiner als die Beobachtungsfehler.

### § 3.

In diesem Abschnitt sollen die Gesichtspunkte erörtert werden, nach denen vor Beginn der eigentlichen Messungen

die der experimentellen Durchführung der Methode dienende Anordnung geprüft wurde, und ferner die Fehlerquellen und die an den Beobachtungen anzubringenden Korrekturen besprochen werden.

Zunächst ergibt sich die Forderung, daß die für die kurze Zeit  $t_2$  angelegte elektrische Feldstärke hinreichend groß sein muß, um *alle* zur Zeit des Einsetzens der E.M.K. vorhandenen Ionen zur Abscheidung zu bringen. Ist  $d$  der Elektrodenabstand,  $k$  die Beweglichkeit der abgeschiedenen Ionenart in  $\text{cm}^2/\text{Volt sec}$ , so ist die Zeit, die ein Ion in maximo braucht, ehe es an der Elektrode abgeschieden wird, gegeben durch

$$\tau = \frac{d^2}{kV} \text{ sec}$$

und es ist die anzulegende Spannung  $V$  so groß zu wählen, daß  $\tau$  erheblich kleiner als  $t_2$  wird. Ob die angelegte Spannung genügend groß ist, läßt sich praktisch dadurch prüfen, indem man die  $i/J$ -Kurven für verschiedene  $V$  aufnimmt und prüft, wie groß man  $V$  machen muß, um die Kurven bis zu den höchsten verwendbaren Umdrehungsgeschwindigkeiten unabhängig von  $V$  zu machen. Es darf sich, da reine Volumionisation angenommen ist, auch keine Abhängigkeit von dem Vorzeichen von  $V$  ergeben.

Ferner ist zu beachten, daß zwischen den Elektroden fast stets ein Voltaeffekt besteht, der während  $t_2$  neben der hohen angelegten Spannung nicht in Betracht kommt, wohl aber während  $t_1$  stört, da die Ionen durch ihn bewegt und teilweise an den Elektroden abgeschieden werden; sind die Richtungen der Felder des Voltaeffektes und der zum Auffangen der Ionen dienenden Felder gleich gerichtet, so wird durch die Abscheidung der Ionen an den beiden Elektroden die Wiedervereinigung zurückgedrängt, die aufgefangene Elektrizitätsmenge infolgedessen zu groß gefunden. Im entgegengesetzten Fall, bei verschiedener Richtung der beiden Felder, wird der oben genannte Effekt dadurch überkompensiert, daß die während  $t_2$  aufgefangene Elektrizitätsmenge durch die während  $t_1$  infolge des Voltaeffektes abgeschiedene teilweise neutralisiert wird. Die Einwirkung des Voltaeffektes auf die Ionen des Meßkondensators läßt sich nun dadurch vermeiden, daß man die

äußere Elektrode desselben während  $t_1$  nicht erdet, sondern auf ein bestimmtes Potential bringt, das so abgeglichen ist, daß das hierdurch zwischen den Elektroden angelegte Feld dasjenige des Voltaeffektes kompensiert.

Die experimentelle Durchführung der im vorstehenden angegebenen Meßmethode verlangt die Bestimmung der Elektrizitätsmenge, welche aus einer ionisierten Gasmasse durch ein starkes elektrisches Feld abscheidbar ist, nachdem die Gasmenge während einer gemessenen Zeit sich selbst überlassen war, ohne daß ein elektrisches Feld auf die sich anhäufenden Ionen einwirkte. Von entscheidender Bedeutung für die Brauchbarkeit der Methode ist das Ergebnis der Untersuchung, welcher Bruchteil der einmal auf dem isolierten System abgeschiedenen Elektrizitätsmengen wieder verloren geht. Bei jeder elektrometrischen Messung von Stromstärken, z. B. Sättigungsströmen, findet bekanntlich ein Zurückfließen der aufgefundenen Elektrizitätsmengen durch ionisierte Gase außerhalb des Feldes des Meßkondensators und durch unvollkommene Isolatoren statt (leak back); bei der hier vorliegenden Aufgabe ist noch die Möglichkeit des Zurückfließens der aufgefundenen Menge im Meßkondensator selbst während der Zeit, in der das Feld nicht angelegt ist, in Betracht zu ziehen. Um das Zurückfließen auf ein Minimum zu reduzieren, ist es notwendig, das Potential des isolierten Systems dauernd möglichst nahe an Null zu halten, d. h. mit hoher Volttempfindlichkeit des Elektrometers und entsprechend großer Kapazität zu arbeiten. Die durch den leak back bedingte Korrektur kann dadurch zu Null gemacht werden, daß man das mittlere Potential des isolierten Systems während einer Beobachtung genau gleich Null macht; die Zeit, die das System braucht, um von dem Anfangswert des Potentials auf Null zu kommen, wird dann durch den leak back um ebensoviel verkürzt, wie die Zeit, die verstreicht, während das Potential bis zum Endwert steigt oder fällt, verlängert wird. — Ein analoges Verfahren wird bei kalorimetrischen Versuchen bei dem sog. Rumfordschen Kunstgriff angewendet, indem die Anfangs- und Endtemperatur so gewählt werden, daß sie gleich weit von der Temperatur der Umgebung entfernt sind. — Gehorcht das Potential  $v$  des isolierten Systems der Gleichung

$$\frac{dV}{dt} = a - b \cdot V$$

( $a, b$  Konstanten,  $b$  stets positiv)

und nehmen wir an, daß

$$\begin{array}{lll} \text{die Potentiale} & -V_0, & 0, & +V_0 \\ \text{zu den Zeiten} & 0, & T - \tau, & 2T \end{array}$$

erreicht werden, dann ist  $\tau$  positiv. Nehmen wir ferner an, daß  $\tau$  klein gegen  $T$  vorausgesetzt werden darf, so ist auch immer  $b \cdot v$  klein gegen  $a$ ; die Konstante des Zurückfließens ist dann in erster Annäherung gegeben durch  $b = 2\tau/T^2$  und die Zeit  $2T$  ist bis auf Größen zweiter Ordnung gleich derjenigen, die das System brauchen würde, um von dem Potential  $-V_0$  auf  $+V_0$  zu kommen, wenn bei unverändertem  $a$  die Konstante  $b = 0$  gesetzt wird.

Bei der hier vorliegenden Aufgabe sind etwas andere Formeln der Berücksichtigung des Rückfließens zugrunde zu legen, da dieses nicht kontinuierlich stattfindet; während der Zeit  $t_2$ , in der im Meßkondensator das elektrische Feld angelegt ist, verschwindet natürlich der dort sonst vor sich gehende Elektrizitätsgewinn resp. -Verlust. Wie in den Tabellen nachgewiesen wird, ist der Rückfluß, der außerhalb des Meßkondensators stattfindet, gegenüber dem im Inneren desselben vor sich gehenden zu vernachlässigen. Wir nehmen jetzt also an, daß während der Zeit  $t_2$  überhaupt kein Rückfluß stattfindet, dagegen während des übrigen Teiles  $t_1$  der Umdrehungszeit des Disjunktors. Hat zur Zeit  $t = 0$  das isolierte System das Potential  $-V_0$ , und wird zu gleicher Zeit das elektrische Feld im Meßkondensator angelegt, dann ist zur Zeit  $t_2$  eine Elektrizitätsmenge abgeschieden, die dem zur Zeit  $t = 0$  vorhandenen Vorrat und der der in der Zeit  $t_2$  gebildeten Ionenmenge entspricht; das Potential werde während dieser Zeit um den Betrag  $a$  gehoben. In der Zeit von  $t = t_2$  bis  $t = t_1 + t_2$  sec steigt das Potential durch Elektrizitätsaustausch mit der Hülle des Meßkondensators auf  $(-v_0 + a)e^{-bt_1}$ ; es steigt im Verlauf der nächsten  $t_2$  sec weiter um  $a$ ; zur Zeit  $2(t_1 + t_2)$  hat es den Wert:

$$-v_0 e^{-2bt_1} + a(e^{-bt_1} + e^{-2bt_1}),$$



zur Zeit  $n(t_1 + t_2)$  sec den Wert:

$$v = -v_0 e^{-nb t_1} + a e^{-b t_1} \frac{1 - e^{-nb t_1}}{1 - e^{-b t_1}}.$$

Wählt man nun die Potentiale am Anfang und am Ende der Beobachtung gleich weit vom Nullpunkt, so kommt

$$\alpha = v_0 \frac{e^{nb t_1} + 1}{e^{nb t_1} - 1} (e^{b t_1} - 1) = \frac{2v_0}{n} \left( 1 + \frac{n^2 b^2 t_1^2}{12} - \frac{n^4 b^4 t_1^4}{720} + \dots \right).$$

$C$  sei die Gesamtkapazität der Anordnung; führen wir die Versuchsdauer  $T = n t_1$  ein, so erhalten wir für die zu messende Stromstärke  $i$

$$i = C \frac{2v_0}{T} \left( 1 + \frac{T^2 b^2 (1 - \gamma^2)}{12} \right);$$

der Klammerausdruck ist der Korrektionsfaktor, der an dem vor der Klammer stehenden, wegen des Rückflusses noch unkorrigierten Werte der Stromstärke anzubringen ist. Die Formel zeigt, wie weit man mit der Versuchsdauer in die Höhe gehen darf, ohne die Korrektion zu groß werden zu lassen.

Die Außenelektrode des Meßkondensators wird in bestimmten Intervallen auf ein hohes Potential gebracht und wieder geerdet; gleichzeitig mit den Änderungen des Potentials dieser Elektrode ändert sich auch dasjenige des isolierten Systems, da dieses von jener influenziert wird.

Zwei derartige, aufeinanderfolgende Potentialsprünge des isolierten Systems erteilen der Elektrometernadel zwei gleich große Impulse in entgegengesetzter Richtung; ist die Umlaufgeschwindigkeit nicht sehr groß, so kommt die Nadel gar nicht zur Ruhe resp. zur langsamen gleichförmigen Bewegung. Die Potentialsprünge durch Influenzierung lassen sich aber vollkommen verhindern, indem man einen zweiten Teil des isolierten Systems ebenso stark, aber in entgegengesetztem Sinne, influenziert.

#### § 4. Versuchsanordnung.

Der wichtigste Teil ist der Kondensator, zwischen dessen Elektroden sich das der Wirkung der  $\beta + \gamma$ -Strahlen zu unterwerfende Gas befindet. Die an diesen Teil des Apparates zu stellenden Anforderungen sind: Möglichst vollkommene Isolation

der beiden Elektroden gegeneinander, dabei vollkommen luftdichter Abschluß nach außen; Einrichtung, um durch Durchströmenlassen das Gefäß mit trockenen, staubfreien Gasen füllen zu können.

Die Konstruktion ist aus nachstehender Fig. 2 ersichtlich:

*A* ist die isolierte Elektrode, innerhalb deren das Radiumpräparat — 1 mg Gieselsches reines  $\text{RaBr}_2$  —, in Glasröhrchen verschmolzen, angebracht ist; *B* ist ein Schutzring, der

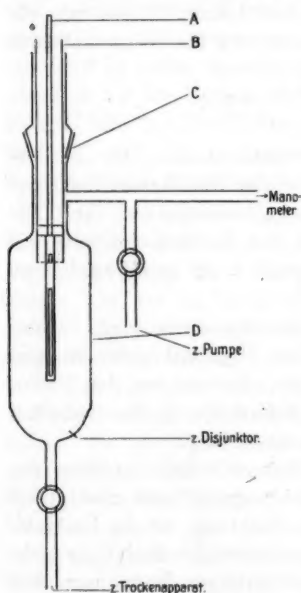


Fig. 2.

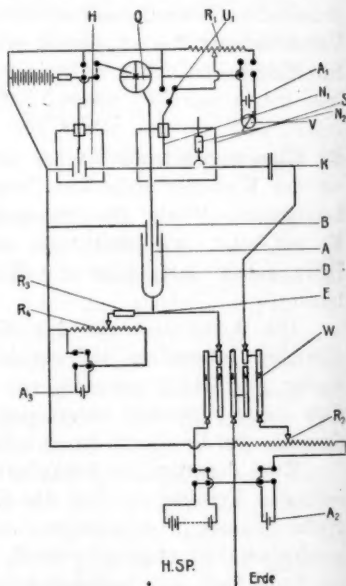


Fig. 3.

von *A* durch einen gut polierten, mit Marineleim luftdicht eingesetzten Hartgummistopfen getrennt ist.

Auf das Schutzrohr ist der eine Teil eines Glasschliffs *C* aufgekittet, vermittelt dessen die Innenelektrode in das aus Glas gefertigte Gefäß *D* eingesetzt wird. Das Glasgefäß ist auf der Innenseite versilbert, ein eingeschmolzener Platindraht vermittelt den Kontakt, so daß die Versilberung auf beliebige Potentiale aufgeladen werden kann.

Zwei Glasröhren ermöglichen, das Gefäß zu evakuieren und zu füllen. Ein weiterer Rohransatz führt zu einem Hg-Manometer.

Die Innenelektrode ist durch eine, mit statischem Schutz versehene Leitung mit dem isolierten Konduktor einer Kontaktvorrichtung, eines sog. Elektrometerschlüssels *S* (vgl. Fig. 3<sup>1)</sup>) verbunden, an den auch die übrigen isolierten Teile der Meßanordnung angeschlossen sind.

Für die Messung der Aufladegeschwindigkeit des ganzen isolierten Systems diente ein Quadrantenelektrometer Dolezalekscher Konstruktion in der üblichen heterostatischen Schaltung; die Nadel war mittels Krügerbatterie auf  $\pm 102$  Volt geladen. Für die Justierung der Anordnung zum Ausgleich der Induktionswirkung (vgl. weiter unten) ist das Quadrantenelektrometer wegen seiner langen Einstellungsdauer (40 Sekunden) nicht gut zu gebrauchen; hierzu diente ein Hankelsches Elektrometer *H* empfindlichster Ausführung, ebenfalls in heterostatischer Schaltung. Dieses Elektrometer hätte unter normalen Verhältnissen wohl auch zur Messung der Geschwindigkeit der Aufladung dienen können, da der Nullpunkt bei guter Aufstellung sich auf mindestens 0,005 Volt genau konstant halten läßt; in dem zur Verfügung stehenden Raume war jedoch die zu ermöglichende Aufstellung auf Gaussstativen derart wackelig, daß ein Bewegen des Körpers vor dem Elektrometer eine Änderung der Einstellung um mehr als 0,1 Volt zur Folge haben konnte. Beim Quadrantenelektrometer, das wegen seines schwereren beweglichen Systems weniger empfindlich gegen Neigungsänderungen ist, und außerdem mittels objektiver Ablesung aus der Ferne abgelesen werden kann, blieben die Nullpunktänderungen viel kleiner, unter 0,005 Volt.

Die isolierten Teile der beiden Elektrometer sind nun, ebenfalls statisch geschützt, mit dem Elektrometerschlüssel verbunden; endlich ist an demselben als Ballastkapazität die eine Belegung eines Siemensschen Glimmerkondensators *K* von 0,01 M.F. angeschaltet.

Das ganze isolierte System kann, indem die Nadel *N* des

1) Die Vorrichtung ist beschrieben Phys. Zeitschr. 12. p. 460. 1911.

Schlüssels zur Berührung mit ihm gebracht wird, mittels des Umschalters  $U_1$  entweder geerdet oder auf beliebige, bekannte Potentiale gebracht werden, die durch Abzweigen an einem einseitig geerdeten Stöpselrheostaten  $R_1$  mittels eines Bleiakкумуляtors  $A_1$ , dessen E.M.K. an dem Präzisionsvoltmeter  $V$  abgelesen wird, erzeugt werden.

Die Nadel  $N_2$  des Schlüssels gestattet, den Kondensator  $K$  aus der Ferne an- und abzuschalten. Die Potentiale der weiteren Elektrode dieses Kondensators und der Außenelektrode  $D$  des Meßgefäßes sind nun in regelmäßigen Zeitintervallen plötzlich und gleichzeitig zu ändern; nach Ablauf einer kurzen, für beide Elektroden gleichen Frist sollen sie wieder die alten Werte erhalten.

Die Werte, die das Potential von  $D$  abwechselnd annehmen soll, seien  $\pm V$  und  $-v_2$ , die entsprechenden Werte der Außenelektrode von  $K \mp v_1$  und 0.

Die Einrichtung, die die Schaltung bewirkte, ist folgende: Auf einer großen Hartgummiwalze  $W$  sind fünf Schleifringe angebracht. Die Ringe 1, 3, 5 sind ungeteilt und mittels Scheiffedern auf den Potentialen  $\pm V$ , 0,  $\mp v_1$  gehalten. Letzteres wird durch Abzweigen von einem dünnadräftigen Ruhstratschen Schieberwiderstand  $R_2$  mittels des Akkumulators  $A_2$  hergestellt. Es braucht nicht gemessen zu werden. Vor alle Stromquellen sind geeignete Kommutatoren gelegt.

Die Ringe 2 und 4 sind beide durch zwei parallel der Walzenachse gefräste Nuten so unterteilt, daß zwei gleich lange, etwa 0,06 der Peripherie bedeckende Sektoren von dem übrigen Teil des Ringes isoliert sind. Die Nuten sind so breit gehalten, daß bei den höchsten verwendeten Spannungen  $V$  (etwa 2400 Volt) zwischen den beiden Sektoren eines Ringes bei der Drehung der Walze kein Lichtbogen sich ausbilden konnte, wenn die Schleiffeder über die Nute hinwegstrich. Die kurzen, steil auf diesen Ringen schleifenden Federn sind so justierbar, daß sie gleichzeitig Anfang und Ende entsprechender Ringstücke berühren. Die kurzen Sektoren von 2 und 4 sind mit den Ringen 1 und 5 metallisch verbunden; das lange Stück von 2 ist isoliert, während das entsprechende Stück von 4 mit dem Ring 3 in Verbindung steht.

Die auf dem Ring 2 schleifende Feder (vgl. Fig. 3) ist nun einmal mit der Außenelektrode  $D$  des Meßkondensators, ferner durch den Graphitwiderstand  $R_3$  von mehreren Megohm mit der Schleiffeder eines Ruhstrat-Schieberwiderstandes  $R_4$  verbunden. Dieser ist genau wie  $R_2$  einseitig geerdet und wird durch eine Zelle  $A_3$  gespeist. Liegt die auf dem Ring 2 schleifende Feder auf dem kurzen, mit dem nicht geerdeten Pol der Hochspannungsbatterie verbundenen Stück, dann fließt ein Strom von ca. 1 Milliampere durch  $R_3$  und einen Teil von  $R_4$  zur Erde; da der Widerstand zwischen dem Pole der Batterie und der Verzweigungsstelle bei 2 neben  $R_3$  verschwindet, so ist jetzt  $D$  zu einem Potential, das der Klemmenspannung der Batterie praktisch gleich ist, aufgeladen. Verläßt die Schleiffeder das Kontaktstück, so wird  $D$  durch  $R_3$  entladen, nicht bis zum Potential 0, sondern bis zu dem einstellbaren Wert  $-v_2$ .

Ein direktes Anlegen der Spannungen an die Sektorenstücke von 2, die so der Elektrode  $D$  erteilt werden, war wegen der Lichtbogengefahr nicht zweckmäßig.

Die auf dem Ring 4 schleifende Feder ist direkt mit der einen Elektrode  $K$  verbunden, diese bereitete keinerlei Schwierigkeiten, da die hier angewendeten Spannungen stets unter 2 Volt lagen.

Die Walze  $w$  mußte nun mit verschiedenen, konstanten Geschwindigkeiten rotieren. Als Betriebskraft diente ein Elektromotor, der zum Anschluß an die städtische Zentrale eingerichtet war. Die verschiedenen Tourenzahlen wurden hervorgebracht durch Einschalten verschiedener Übersetzungen an den Schnurscheiben, die zwischen Motor und Disjunktoren eingeschaltet waren.

Eine Schwierigkeit lag in der Ungleichförmigkeit des Ganges des Motors, da die Spannung der städtischen Zentrale in kurzer Zeit sehr stark schwankte (200—240 Volt). Diese Schwankungen mußten namentlich bei niederen Umdrehungsgeschwindigkeiten, wo der Effekt mit der Tourenzahl stark wächst, sorgfältig ausgeglichen werden.

Zu diesem Zweck diente die in Fig. 4 skizzierte Schaltung, die gleichzeitig erlaubte, die Tourenzahl innerhalb weiter Grenzen zu variieren, so daß mehrere Punkte einer Kurve

aufgenommen werden konnten, ohne daß die Übersetzung an den Schnurscheiben geändert zu werden brauchte. Das Voltmeter  $V$  war nicht, wie in Fig. 2 der Übersichtlichkeit halber angegeben ist, direkt an die Pole der Zelle  $A_1$  gelegt, sondern (vgl. Fig. 4) unter Zwischenschaltung eines mit acht Hg-Näpfen

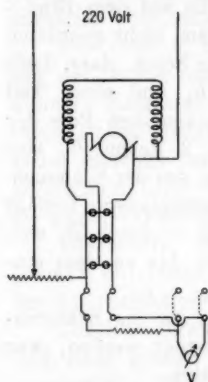


Fig. 4.

versehenen Umschalters; dieser stellte in der einen Stellung die in Fig. 2 gezeichnete Verbindung her, in der anderen legte er das Voltmeter mit geringerer Spannungsempfindlichkeit an die Enden der Feldwicklung des Motors. Vor und parallel zum Anker konnten Glühlampenwiderstände geschaltet werden. Durch Änderung dieser Widerstände wurden verschiedene Tourenzahlen erzielt. Die Regulierung auf konstante Tourenzahl erfolgte in der Weise, daß durch Regulieren mit der Hand an einem Schieberrheostaten die Spannung an dem Voltmeter konstant gehalten wurde. Es gelang so, die Tourenzahl auf mindestens  $\frac{1}{4}$  Proz. konstant zu halten.

## § 5.

Es soll nun zunächst eine Beobachtungsreihe in extenso wiedergegeben werden; dabei mögen einige Bemerkungen über die Art und Weise, wie jede Reihe gewonnen wurde, Platz finden.

Zunächst mußte der Meßkondensator mit trockener, staubfreier Luft gefüllt werden. Nachdem konstatiert war, daß der Apparat vollkommen dicht war, wurde er mit einer Gaedeschen Ölpumpe möglichst hoch evakuiert und längere Zeit (ca. zwei Stunden) im Vakuum in Kommunikation mit einer  $P_2O_5$ -Röhre gelassen. Hierauf wurde durch ein langes, dicht mit  $P_2O_5$  und Wattepfropfen gefülltes, mit Ausnahme der Enden gegen außen luftdichtes Röhrensystem langsam Luft in den Meßkondensator eingelassen und längere Zeit hindurch ein langsamer Gasstrom durch den Trockenapparat und den Meßraum hindurch unterhalten; schließlich wurde der nach der Pumpe führende Hahn

geschlossen und zuletzt der Hahn zwischen Meßkondensator und Trockenapparat zuge dreht, wenn das Monometer den gewünschten Druck anzeigt.

Das Quadrantenelektrometer  $Q$  wurde sodann in der üblichen Weise justiert; die Justierung ist dann erreicht, wenn das Elektrometer für gleich hohe positive und negative Potentiale entgegengesetzt gleiche Ausschläge erzeugt. Da die durch die Nadel  $N_1$  (vgl. Fig. 3) dem isolierten System zu erteilenden Potentiale leicht auf runde Werte gebracht werden können, ergibt sich hieraus direkt die Volttempfindlichkeit des Elektrometers.

Zu der Kapazität des Siemensschen Präzisionsglimmerkondensators kommt noch die im Vergleich zu dieser kleinen Kapazität der ganzen Anordnung hinzu.

Diese letztere wurde mit Hilfe eines Harmschen Normalkondensators nach der von Harms<sup>1)</sup> angegebenen Methode bestimmt; diese Bestimmung geschah vor der Füllung des Meßkondensators mit reinen Gasen, während das Ra-Präparat aus dem Inneren der Elektrode entfernt war. Die starke Ionisation hätte hier Fehler bedingt.

Der Voltaeffekt im Meßkondensator wurde gemessen, indem beobachtet wurde, an welchem Punkt der Skala sich das Elektrometer einstellte, wenn beide Nadeln des Schlüssels hochgezogen wurden. Nach dem Anlegen des Akkumulators  $A_3$  an den Widerstand  $R_4$  wurde dessen Schleifkontakt solange ver stellt, bis das isolierte System gerade auf dem Nullpunkt des Potentials im Gleichgewicht blieb. Der Glimmerkondensator  $K$  war nur der Zeitersparnis halber mittels  $N_2$  vom isolierten System abgeschaltet.

Nach dieser Einstellung konnte die „leak-back“-Konstante bestimmt werden. Durch die Nadel  $N_1$  wurden kleine positive und negative Potentiale zugeführt, und nach Hochziehen von  $N_1$  die Abnahme des Elektrometersausschlags mit der Zeit beobachtet.

Ist das Potential des isolierten Systems so klein, daß im Meßkondensator freier Strom fließt, so muß  $b = 1/v \, dv/dt$  konstant werden, was, wie die Tabelle ergibt, der Fall ist.

1) F. Harms, Phys. Ztschr. 5. p. 47. 1903.



Eine ähnliche Bestimmung wurde auch ohne Radium im Meßkondensator ausgeführt; sie ergibt, daß der beobachtete leak back zum größten Teil durch die Ionisation im Meßkondensator und nicht durch die Isolatoren und Ionisation außerhalb statt hat.

Als letzte Vorbereitung zu den Versuchen mußte, um die Potentialsprünge des isolierten Systems während der Umdrehung des Disjunktors zu verhindern, das Potential  $v_1$  einreguliert werden, auf das die eine Belegung des Kondensators  $K$  (Fig. 3) gebracht werden mußte, während der Meßkondensator zur Austreibung der Ionen geladen war. Die Nadel des Hankelektrometers wurde zu diesem Zweck erst schwach, dann stärker aufgeladen; während der Disjunktors langsam lief, wurde der Schleifkontakt von  $R_2$  zuerst roh bei unempfindlicher, dann fein bei empfindlicher Schaltung des Elektrometers  $H$  auf den Punkt gebracht, wo die Nadel sich nicht mehr bewegte, wenn die Schleiffedern des Disjunktors von dem einen zum anderen Kontaktstück übergingen. Vor dieser Einstellung mußte nachgesehen werden, ob die Schleiffedern des Disjunktors genau gleichzeitig Kontakt machten.

Nunmehr sei ein vollständiges Meßprotokoll mitgeteilt:

1. Füllung:

Luft, getrocknet und staubfrei gemacht, 745 mm Hg, 15° C.

2. Voltempfindlichkeit:

Isoliertes System	+ 1,00 Volt,	Ausschlag	196,0 Sk. T.
			196,0 " "
	- 1,00 " "		195,0 " "
			195,0 " "
Mittel:			195,5 Sk. T.

3. Kapazität des Systems: Kondensator  $K$ : 0,00990 M. F. = 8910 cm.  
Harmkondensator (Influenzierungskoeffizient 38,4; Kapazität 42,3 cm)  
statt  $K$  an das isolierte System geschaltet:

Influenziert mit	+ 2,00 Volt,	Ausschlag	140,5 Sk. T.
			140,5 " "
	- 2,00 " "		139,5 " "
			139,5 " "
Mittel:			140,0 Sk. T.

$$\text{also } 2,00 \cdot 38,4 = (c + 42,3) \frac{140,0}{391}, \quad c = 173,2 \text{ cm.}$$

## 4. Leak back Konstante

Potentiale des isolierten Systems:

	Anfangswert	Endwert	Mittelwert	Zeit	0,000
+	72	62	67	210	709
	58	48	53	263	717
-	134	124	129	107	724
	114	104	109	132	695
	94	84	89	162	693
	74	64	69	199	728
	54	44	49	282	724

Mittel: 0,000713

ohne Ra im Meßkondensator:

115	105	110	680	0,000133
-----	-----	-----	-----	----------

## 5. Disjunktork

Elektrometer

Umdrehg.	in sec.	s	Sk. T.	in sec.	Mittel	100 y	100 y corr.
—	—	∞	60			100	100 „
				137,4	137,6		
				138,0			
				137,4			
10	80,0	0,125	20	217,2	218,0	21,0	21,1 „
				218,8			
				218,0			
10	62,0	0,1614	60	566,6	568,0	24,2	24,3 „
	61,6			570,0			
	62,2			567,4			
10	44,0	0,227	60	467,0	467,0	29,5	29,8 „
	44,2			467,0			
20	70,0	0,286	60	383,5	384,0	35,9	36,0 „
	70,0			384,5			
20	42,5	0,471	60	275,0	275,1	50,1	50,1 „
	42,5			275,2			
20	29,6	0,674	60	209,6	210,8	62,5	62,5 „
	29,8			213,0			
				209,8			
30	24,4	1,229	60	177,0	177,2	77,8	77,8 „
	24,2			177,4			
	24,6						
100	46,6	2,145	60	160,4	161,2	85,5	85,5 „
	46,6			162,0			
				162,4			
				160,0			
100	40,2	2,49	60	159,4	158,0	87,2	87,2 „
	40,2			158,0			
				156,6			
100	24,8	4,02	60	149,0	149,1	92,4	92,4 „
	25,0			149,2			

In 3. ist die Kapazität des Kondensators  $K$  angegeben, wie sie in dem Normallaboratorium von Siemens & Halske bestimmt worden ist. Die als Korrektion auftretende Größe der Kapazität des Systems Elektrometer + Schlüssel + Meßkondensator inkl. Zuleitungen ist nach der Harmsschen Methode bestimmt.

Tab. 5 enthält in Spalte 1, 2, 4 die direkt beobachteten Größen; Spalte 3 enthält den Mittelwert der Umdrehungsgeschwindigkeit  $s$ , Spalte 7 den aus den Mittelwerten der Aufladungszeiten berechneten Wert der Größe  $y = i/J$ ; Spalte 8 dieselbe Größe, bezüglich des Elektrizitätsaustausches mit der Umgebung korrigiert. Diese Werte sind fortan als beobachtete angegeben resp. gezeichnet.

Berechnet man nach der Formel

$$\alpha/e = V/J \cdot \text{ctg}^2 \vartheta \quad \text{den Wert von } \alpha/e,$$

so erhält man mit

$$J = \frac{9080}{300} \frac{60}{195,5 \cdot 137,6} = 0,0675 \text{ E.S.E.}$$

$$V = 300 \text{ ccm}, \quad \text{ctg } \vartheta = 1,008 \text{ die Zahl 4485 für } \alpha/e.$$

Berechnet man für jeden Punkt der Kurve den experimentell bestimmten Wert von  $\alpha/e$  durch Vergleich mit der theoretischen  $y, s$  Kurve, dann kommen um so höhere Werte für  $\alpha/e$  heraus, je größer  $s$ , je kürzer also die Zeit ist, die die Ionen durchschnittlich gelebt haben.

Tabelle 1.

$s$	$\alpha/e$	$s$	$\alpha/e$
0,1250	4480	0,674	5560
0,1614	4530	1,229	8330
0,227	4925	2,145	13800
0,258	5150	2,49	16000
0,286	4670	4,02	22900
0,471	5150		

Zeichnet man die Kurve  $y_2$  des § 2 mit einem solchen Abszissenmaßstab, daß die Anfangssteigung dieser Kurve mit der Kurve der experimentellen Werte übereinstimmt, so ergibt sich hier wie in allen beobachteten Fällen, daß die experimentelle Kurve stets bei großen Umdrehungsgeschwindigkeiten

unter der theoretischen liegt, daß sie nicht, wie sie sollte, gegen 1 konvergiert, sondern von einem bestimmten, mehr oder weniger unterhalb liegenden Wert an nur noch sehr viel langsamer ansteigt. In der beiliegenden Fig. 5 ist dies deutlich zu erkennen. Daß die bei höheren Werten der Umdrehungsgeschwindigkeit auftretenden Differenzen zwischen Theorie und Experiment nicht auf Beobachtungsfehlern beruhen, glaube ich annehmen zu können. Eine Erklärung der Unterschiede würde

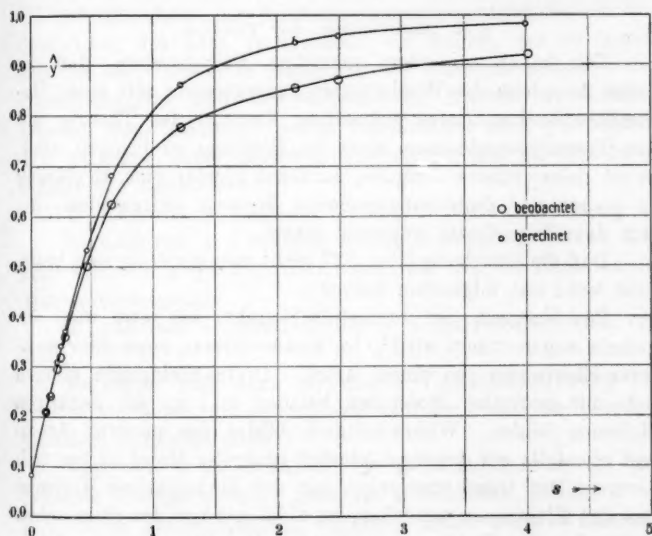


Fig. 5.

sich qualitativ durch folgende Überlegung gewinnen lassen. Bei dem Vorgang der Ionisation ist das negative Ion gleich nach seiner Entstehung sicher zunächst kürzer oder länger, je nach der Natur des umgebenden Gases, als freies Elektron vorhanden; das positive Ion ist wahrscheinlich ebenfalls kurze Zeit nach seiner Entstehung kleiner als später, nachdem es sich wie das negative Ion, mit neutralen Atomen zum normalen Molion beladen hat. Die noch nicht beladenen Ionen müssen schneller beweglich sein als jene und deshalb auch schneller rekombinieren.

Eine zweite Möglichkeit der Erklärung bietet sich darin, daß man annimmt, in dem Ionisationsraum seien Gaspartien an den Elektroden durch sehr weiche Sekundärstrahlung relativ stark ionisiert; die Oberflächenionisation in diesen Schichten würde sehr viel rascher durch Rekombination und durch Diffusion an die Gefäßwände zugrunde gehen als die Volumionisation in den übrigen Teilen des Meßkondensators. Hierauf kommen wir im nächsten Abschnitt noch zurück.

#### § 6. Modifikation der Theorie.

Wir haben an einem speziellen Fall gesehen, daß die unter Annahme des Wiedervereinigungsgesetzes mit einer Rekombinationskonstanten gemachten Ansätze der Theorie mit den Versuchsergebnissen nicht in Einklang zu bringen sind; es ist daher unsere Aufgabe, zunächst hierfür eine Erklärung zu suchen und dann entsprechende Formeln aufzustellen, die sich dem Experiment anpassen lassen.

Daß die Gleichung (1) p. 827 nicht streng richtig sein kann, geht wohl aus folgendem hervor:

Der Vorgang der Ionisation besteht, wie jetzt wohl allgemein angenommen wird<sup>1)</sup>, im Abdissoziieren eines oder mehrerer Elektronen von einem Atom. Diese Elektronen können sich mit neutralen Molekülen beladen und so die negativen Molionen bilden. Wahrscheinlich bildet der positive Atomrest ebenfalls ein Aggregat (cluster) neutraler Moleküle um sich herum. Die Geschwindigkeit, mit der die negativen Molionen aus den Elektronen entstehen, ist abhängig von der chemischen Natur der das Elektron umgebenden Moleküle. In den Edelgasen und in reinem Stickstoff sind die Elektronen so lange frei<sup>2)</sup>, daß sie unter dem Einfluß schwacher elektrischer Felder meßbare Strecken als solche zurücklegen. In Sauerstoff und Luft ist dagegen die Lebensdauer des freien Elektrons und des noch unfertigen negativen Molions eine sehr kleine; nur bei Ionen ganz kurzer Lebensdauer, in sehr starken elektrischen Feldern macht sich die höhere als die normale Beweglichkeit negativer Ionen bemerkbar.

1) Vgl. z. B. Rutherford, Radioactivity, 2d ed. p. 56.

2) J. Franck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 12. p. 291, 618. 1910.

Es ist nun doch gewiß naheliegend, bei den unfertigen, also leichter beweglichen Ionen eine größere Rekombinationsgeschwindigkeit wie bei den normalen Ionen anzunehmen. Die im vorigen Paragraphen angegebene Zunahme der scheinbaren Wiedervereinigungskonstanten mit der Zunahme der Rotationsgeschwindigkeit, also mit der Verkürzung der Lebensdauer, erscheint demnach sofort verständlich.

Es ist wohl verfrüht, irgendwelche speziellen Ansätze über die Abhängigkeit der Wiedervereinigungsgeschwindigkeit von dem Alter des Ions zu machen; wir wollen, um zu zeigen, daß die oben erwähnte Annahme die Differenz zwischen den experimentellen und den berechneten Kurven zu erklären vermag, diese Annahme weiter vereinfachen und spezifizieren. Wir gelangen dabei zu der Anschauung<sup>1)</sup>, daß die Geschwindigkeit der Reaktionen:

1. Elektron + positives Ion =  $x$  neutrale Moleküle,

2. Elektron +  $y$  neutrale Atome = negatives Molion, sehr groß sein soll gegenüber derjenigen, mit der die Reaktion der Wiedervereinigung:

3. positives + negatives Ion =  $z$  neutrale Moleküle verläuft.

Es ergibt sich dann für unsere Versuchsanordnung folgendes, für Zeiten, die so groß sind, daß die Reaktionen 1. und 2. praktisch vollendet sind:

Von den  $q$  Ionenpaaren, die pro Kubikzentimeter pro Sekunde erzeugt werden, geht ein bestimmter Bruchteil sofort durch Rekombination verloren; findet diese Wiedervereinigung innerhalb des Mutteratoms statt, so entspricht dies der Braggschen Auffassung der Initialrekombination —, es mögen nach Abzug dieses Verlustes  $q\beta$  Ionenpaare pro Kubikzentimeter und Sekunde übrigbleiben, die nun entsprechend dem Massenwirkungsgesetz miteinander reagieren.

Die Formeln des § 2 werden dann:

$$(1'') \quad q\beta - \alpha n^2 = \frac{dn}{dt},$$

$$(2'') \quad n = \sqrt{\frac{q\beta}{\alpha}} \frac{e^{2\sqrt{q\alpha\beta}t} - 1}{e^{2\sqrt{q\alpha\beta}t} + 1},$$

1) J. Franck, Ann. d. Phys. 21. p. 972. 1906.

$$(4'') \quad i = V e \left[ \frac{1}{t} \sqrt{\frac{q \beta}{\alpha}} \frac{e^{\frac{2t}{\alpha} \sqrt{q \alpha \beta (1-\gamma)}} - 1}{e^{\frac{2t}{\alpha} \sqrt{q \alpha \beta (1-\gamma)}} + 1} + q \gamma \right],$$

$$(5') \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2t(1-\gamma)\sqrt{q\alpha\beta}}, & \frac{x}{s} = \frac{1}{2(1-\gamma)\sqrt{q\alpha\beta}}, \\ q\alpha\beta = \frac{1}{\left(\frac{x}{s}\right)^2 (2(1-\gamma))^2}, \end{cases}$$

$$(6') \quad i = J \left[ 2(1-\gamma) \beta x \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} + \gamma \right],$$

$$(7') \quad \frac{i/J - \gamma}{2(1-\gamma)} = \beta x \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1},$$

$$(10') \quad \frac{\alpha}{e} = \frac{V}{J} \beta \operatorname{ctg}^2 \vartheta,$$

$$(11) \quad \frac{\alpha}{e} = \frac{V}{J} \frac{1}{\beta} \frac{1}{\left(\frac{x}{s}\right)^2 (2(1-\gamma))^2}.$$

Die vorgetragene Interpretation der Bedeutung der Konstante  $\beta$  ist, wie hier bemerkt werden muß, nicht die einzig mögliche: Die Bragg-Kleemansche Hypothese der Existenz halbdissoziierter Moleküle führt als Spezialfall der vorgetragenen Auffassung natürlich zu denselben Gleichungen.

Andererseits könnte, wie Franck und Westphal<sup>1)</sup> vermuteten, das Auftreten doppelt und mehrfach geladener Ionen die Nichtübereinstimmung mit den Gleichungen des § 2 verursachen. Formal würde man auch hier zu denselben Gleichungen gelangen, wenn man die Reaktionsgeschwindigkeit



gegenüber derjenigen



annimmt.

1) J. Franck u. G. Westphal, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 11. p. 146. 1909.



Wenn ein Teil der in dem Meßkondensator vorhandenen Ionisation durch weiche Sekundärstrahlen erzeugt würde und demnach an einer der Elektroden konzentriert wäre, so könnte in dieser Schicht ein sehr schneller Ionenverlust erfolgen, da die Diffusion und die gewöhnliche Wiedervereinigung infolge der sehr groß anzunehmenden Ionisierungsstärke  $q$  hier stark wirkt. Indes ist der Versuch, auf diese Weise den Widerspruch der Beobachtung mit der ursprünglichen Theorie zu erklären, hinfällig; die Beobachtung des Sättigungsstromes in dem Meßkondensator bei verschiedenen Gasdrucken wich nur sehr wenig von der Proportionalität mit dem Druck ab, während bei Annahme einer durch weiche Sekundärstrahlen hervorgerufenen Ionisation eine Beziehung von der Form

$$J = a + bp \quad (a, b \text{ Konstanten})$$

gelten müßte.

Nach den Formeln dieses Paragraphen muß es möglich sein, die experimentellen Punkte zu berechnen, indem man aus den beobachteten  $y$ -Werten

$$\frac{y - \gamma}{2(1 - \gamma)} = y_1 \text{ als Funktion von } s$$

berechnet. Die so erhaltene Kurve muß sich durch Maßstabsänderung *beider* Koordinaten mit der  $y_1$ -Kurve des § 2 zur Deckung bringen lassen. Die Maßstabsänderung der Ordinate ergibt dann direkt die Größe  $1/\beta$ .

Mit den so erhaltenen Faktoren ist es dann auch ein Leichtes, Kurven zu berechnen, die sich den experimentellen  $y, s$ -Kurven anschmiegen. Nachstehende Tabellen zeigen den Grad der erreichten Übereinstimmung.

Die Werte, in denen die Maßstabsänderungen vorzunehmen waren, wurden in der Weise gefunden: Die Logarithmen der Abszissen und Ordinaten der beobachteten  $y_1, s$ -Kurve und der theoretischen  $y_1, s$ -Kurve wurden in großem Maßstab auf Koordinatenpapier aufgetragen, die Punkte einer der beiden Kurven wurden dann auf Pauspapier durchgestochen, ebenso die Lage der Koordinatenachsen. Die auf dem Pauspapier gezeichnete Kurve wurde nun so lange auf dem Millimeterpapier bewegt, mit Beibehaltung der Richtung der Koordinatenachsen, bis die Kurven möglichst gut aufeinanderfielen. Die Lage der Ko-

ordinatenachsen des Pauspapiers auf dem anderen Bogen gab dann direkt die gesuchten zwei Größen  $x/s$  und  $\beta$ .

### § 7. Beobachtungsergebnisse.

Tabelle 2.

Meßkondensator: Luft, trocken und staubfrei,  $p = 745$  mm.

$J = 0,0675$  E.S.E.;  $x/s = 0,58$ ;  $\beta = 0,894$ .

$\alpha/e = 4470$ .

$s$ beobachtet	100 $y$ beobachtet	100 $y$ berechnet	100 $y$ berechnet nach § 2
0,1250	21,0	20,2	21,0
0,1614	24,2	24,1	24,5
0,227	29,6	29,6	31,0
0,258	32,0	32,4	34,2
0,286	36,0	35,1	37,0
0,471	50,1	50,4	53,4
0,674	62,5	63,2	68,2
1,229	77,8	78,9	86,2
2,145	85,5	86,5	94,2
2,49	87,2	86,7	96,0
4,02	92,4	88,7	98,4

Tabelle 3.

Meßkondensator: Luft,  $p = 540$  mm Hg,  $t = 16^\circ$  C.

$J = 0,0473$  E.S.E.;  $x/s = 0,69$ ;  $\beta = 0,878$ .

$\alpha/e = 4300$ .

$s$ beobachtet	100 $y$ beobachtet	100 $y$ berechnet	100 $y$ berechnet nach § 2
0,171	27,0	27,1	27,0
0,194	30,1	29,3	29,4
0,245	35,7	35,1	35,0
0,275	38,4	38,3	38,2
0,298	39,75	39,6	40,6
0,376	48,5	48,5	49,0
0,455	53,9	54,5	55,5
0,628	65,1	65,6	67,8
1,00	74,9	76,8	83,1
1,44	81,1	81,0	90,8
2,08	84,2	85,0	95,2
2,87	88,9	87,0	97,5

Tabelle 4.

Meßkondensator: Luft,  $p = 420$  mm Hg,  $t = 17^\circ$  C. $J = 0,0382$  E.S.E.;  $\alpha/s = 0,86$ ;  $\beta = 0,82$ . $\alpha/e = 3870$ .

$s$ beobachtet	100 $y$ beobachtet	100 $y$ berechnet	100 $y$ berechnet nach § 2
0,1722	30,9	30,3	30,2
0,230	37,3	37,4	37,6
0,3225	46,7	47,5	48,4
0,508	61,4	62,0	65,6
0,731	70,0	70,8	79,5
0,988	75,5	75,5	88,6
1,418	80,9	79,4	93,0
1,67	82,9	80,6	94,6
2,05	84,6	81,6	96,4
3,45	87,2	82,8	98,7

Tabelle 5.

Meßkondensator: Luft,  $p = 280$  mm Hg,  $t = 17^\circ$  C. $J = 0,0258$  E.S.E.;  $\alpha/s = 1,08$ ;  $\beta = 0,80$ . $\alpha/e = 3700$ .

$s$ beobachtet	100 $y$ beobachtet	100 $y$ berechnet	100 $y$ berechnet nach § 2
0,202	36,2	35,6	35,1
0,238	39,4	39,4	39,8
0,247	41,65	41,2	41,1
0,272	44,8	44,8	44,0
0,417	57,8	58,3	59,7
0,776	72,5	73,2	81,4
1,12	77,8	78,4	89,8
2,00	81,8	81,7	96,5
2,55	84,2	82,0	97,8
3,31	86,4	82,8	98,7

Die in den folgenden Tabellen mitgeteilten Messungsreihen mit Ionisation durch  $\alpha$ -Strahlung sind nicht in Zylinderkondensatoren, sondern mit Plattenkondensatoren angestellt; die Apparatkonstante  $\gamma$  hatte einen etwas größeren Wert 0,100 bei diesen Versuchen.

Tabelle 6.

Meßkondensator: Volumen 55,5 ccm; Plattenabstand 1,5 cm.

Füllung mit Luft,  $p = 752$  mm,  $t = 18^\circ$  C.

Ionisation durch  $\alpha$ -Strahlung einer dünnen Schicht  $\text{RaBr}_2$ , die auf einer der Elektroden aufgetragen war.

$J = 0,0945$  E.S.E.;  $\alpha/s = 0,107$ ;  $\beta = 0,613$ .

$V/J \text{ctg}^2 \vartheta = 4200$ ;  $a/e = 2570$ .

$s$ beobachtet	100 $y$ beobachtet	100 $y$ berechnet	100 $y$ berechne nach § 2
0,30	13,5	13,6	13,5
0,54	16,8	16,4	16,6
0,75	18,2	18,9	19,2
1,00	22,2	21,9	22,7
1,40	26,4	26,55	27,6
2,41	37,5	37,3	39,0
2,87	41,2	41,9	44,0
4,59	52,2	51,9	60,4
7,70	60,4	59,5	79,2
10,1	62,6	62,0	86,8

Tabelle 7.

Meßkondensator: Volumen = 156 ccm; Plattenabstand 2,5 cm.

Füllung atmosphärische Luft, getrocknet,  $p = 748$  mm,  $t = 18^\circ$  C.

Ionisator: Uranoxyd, auf einer der Elektrodenplatten ausgebreitet.

$J = 0,105$  E.S.E.;  $\alpha/s = 0,42$ ;  $\beta = 0,477$ .

$V/J \text{ctg}^2 \vartheta = 11700$ ;  $a/e = 5430$ .

$s$ beobachtet	100 $y$ beobachtet	100 $y$ berechnet	100 $y$ berechnet nach § 2
0,220	17,5	17,6	17,7
0,315	20,8	21,1	21,7
0,400	24,3	24,2	25,2
0,485	26,8	27,5	28,2
0,578	29,1	30,1	31,7
0,641	32,7	32,0	32,8
0,715	34,7	34,9	36,3
0,800	35,8	36,3	39,0
0,910	37,3	38,6	42,6
1,06	38,9	41,1	47,7
1,81	48,1	47,6	67,0
2,81	55,0	50,6	81,7
4,00	58,3	51,8	89,7
6,00	62,0	52,5	91,2
8,65	66,0	53,0	97,5

Die Tabellen zeigen, daß bei den kleinen und mittleren Umdrehungsgeschwindigkeiten, von  $s = 0$  bis  $s = 2,0$  etwa, die berechneten Werte mit den beobachteten innerhalb der Beobachtungsfehler übereinstimmen, während dies bei der Verwendung der in § 2 gegebenen Formeln nicht möglich ist, wo namentlich bei Ionisation durch  $\alpha$ -Strahlen sehr große Differenzen auftreten. Bei großen Umdrehungsgeschwindigkeiten zeigt sich jedoch durchweg ein etwas stärkeres Anwachsen von  $y$  mit  $s$ , als es nach den Formeln des § 6 sein sollte.

Zu genauen Messungen bei großen Umlaufgeschwindigkeiten ist einmal die Methode weniger geeignet, weil in diesem Falle die Kontaktfedern Schwierigkeiten bereiten. Es erschien deshalb verfrüht, diesem letzten Anstieg der Kurven durch Einführung einer weiteren Konstanten Rechnung zu tragen. Immerhin ist die Übereinstimmung zwischen der modifizierten Theorie mit den Messungen weit besser als die der elementaren. Die Bedeutung der dritten Konstanten wäre dann die, daß die schnelle Wiedervereinigung, deren Geschwindigkeit wir der Einfachheit halber  $= \infty$  gesetzt hatten, in Zeiten, die einer Umdrehung des Disjunktors entsprechen, noch nicht ganz vollendet ist; bei immer schnellerer Rotation entgeht ein stets wachsender Bruchteil der  $q(1 - \beta)$ -Ionenpaare infolge der Fortführung durch das elektrische Feld der schnellen Wiedervereinigung.

In den Tabb. 2—5 ist der Einfluß des Druckes auf den Koeffizienten der Wiedervereinigung untersucht; es ergibt sich in qualitativer Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Langevin, Retschinsky und Hendren<sup>1)</sup> eine, wenn auch geringe Abnahme der Konstanten  $\alpha/e$  bei sinkendem Druck.

Der mit der einkonstantigen Formel berechnete Wert der Konstanten  $\alpha/e$  stimmt bei der Versuchsreihe der Tabelle p. 823 mit dem von Retschinsky unter ähnlichen Versuchsbedingungen erhaltenen Wert, 4140, gut überein; doch ist diese Übereinstimmung sofort zerstört, wenn die schnelle Wiedervereinigung berücksichtigt wird. Allem Anschein nach ist der Wert der Wiedervereinigungskonstanten nicht bloß von der Natur der betreffenden Ionen, sondern auch noch von der Ionisierungs-

1) L. L. Hendren, l. c.

stärke abhängig, indem bei stärkerer Ionisation kleineres  $\alpha/e$  auftritt. Der sehr hohe Wert der Wiedervereinigungsgeschwindigkeit bei  $\alpha$ -Strahlung von Uranoxyd rührt vielleicht von Staubteilchen her, die von dem unbedeckten Präparat in den Gasraum gelangen konnten.

#### § 8. Zusammenfassung.

1. Es wurde eine Methode beschrieben, welche die Wiedervereinigungsgeschwindigkeit von Gasionen zu messen gestattet. Die Vorzüge der Methode beruhen einmal in der Verwendbarkeit kleiner Gasmengen, da in ruhendem Gas gearbeitet wird; ferner in der Möglichkeit, beliebige, zeitlich konstante Ionisatoren zu benutzen, da nicht verlangt wird, daß die Wirkung der Strahlenquelle plötzlich erlischt.

Die Methode ist insofern eine direkte, als die Wiedervereinigung zur Beobachtung gelangt, welche ohne Einwirkung eines elektrischen Feldes auf die Gasionen stattfindet.

2. Die Anwendung der Methode auf Gasionen, die in Luft durch  $\alpha, \beta + \gamma$ -Strahlen von Ur resp. Ra erzeugt werden, zeigte, daß die beobachteten Resultate mit denen, die unter Zugrundelegung der Gleichung

$$q = \alpha n_0^2$$

berechnet werden, in keinem Falle ganz in Einklang zu bringen sind; die Differenz ist im Falle der Ionisierung durch  $\alpha$ -Strahlen viel größer, als bei  $\beta + \gamma$ -Strahlung. Der Sinn der Abweichung ist stets derjenige, daß Ionen von kurzem Alter scheinbar eine höhere Wiedervereinigungsgeschwindigkeit zukommt, als solchen, die schon älter sind.

3. Die aus der Theorie der Gasionisation für die Versuchsanordnung abgeleiteten Formeln werden durch Einführung einer weiteren Konstanten modifiziert; die modifizierten Formeln passen sich den Beobachtungen in den günstigen Meßbereichen gut an. Die verschiedenen Möglichkeiten der Interpretation dieser Konstanten werden besprochen. Alle diese Deutungen laufen darauf hinaus, daß außer den bekannten Ursachen für den Ionenverlust eines Gasraumes: Konvektion, Diffusion und Wiedervereinigung der Ionen entsprechend der oben genannten Formel noch eine weitere Ursache wirken muß, die einen Teil der erzeugten Ionen momentan wieder vernichtet.

4. Mit einer Versuchsanordnung, die so gewählt war, daß das Verhältnis der schnellen zu der gewöhnlichen Wiedervereinigung möglichst klein war, wurden Messungen der Wiedervereinigungskonstante  $\alpha$  bei verschiedenen Drucken ausgeführt und eine schwache Abnahme von  $\alpha$  mit sinkendem Druck konstatiert.

Die Veröffentlichung der beschriebenen Versuche hatte ich zurückgehalten in der Absicht, das Ergebnis weiterer, mir wünschenswert erscheinender Beobachtungen auf diesem Gebiet abzuwarten. Es fehlt mir jedoch die Möglichkeit, in nächster Zeit dieselben anzustellen.

(Eingegangen 22. Dezember 1913.)



## 2. *Ultrarot-Monochromatfilter;* *von F. Paschen.*

In mehreren Spektren sind bei etwa  $1\ \mu$  starke Spektrallinien vorhanden,<sup>1)</sup> welche sich vorzüglich zur experimentellen Bearbeitung solcher Fragen eignen, welche die Energie monochromatischer Strahlung betreffen. Zur Isolierung dieser Linien kann ein Filter dienen, welches aus den Filtern *F* Nr. 29 (oder 28) und *H* Nr. 45 (oder 44) von Wratten & Wainwright und einer Wasserschicht von 1 cm Dicke zusammengesetzt ist.

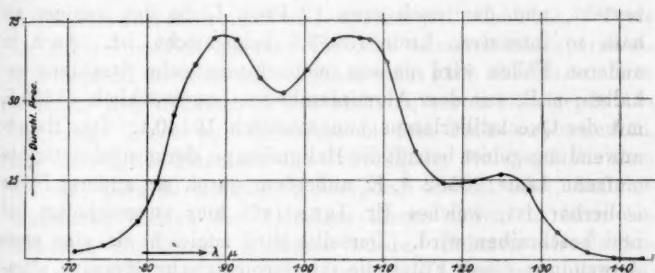
Ausführung 1: Die beiden genannten Filter (je zwischen Gläsern gefaßt) bilden die Seitenwände eines Absorptionstrogens von 1 cm lichter Weite, der zum Gebrauche mit destilliertem Wasser gefüllt wird.

Ausführung 2: Die gefärbten Gelatineschichten beider Filter werden zusammengelegt, so daß ein zwischen Gläsern gefaßtes kombiniertes *F*- und *H*-Filter entsteht. Die Firma liefert dieses. Es läßt erst von  $700\ \mu\mu$  an ein wenig Licht durch und erscheint daher fast schwarz. Die Ränder dieses kombinierten Filters werden (mittels Kanadabalsam) mit Stanniol umklebt zum Schutze der Gelatineschicht gegen Wasser. Dies Filter wird in einen mit Wasser gefüllten Glastrog von Leybold hineingesenkt, dessen innere Weite die Dicke des Glasfilters um 1 cm übertrifft. Der Vorteil dieser Anordnung besteht darin, daß die Justierung eines Strahlenganges mit dem durchsichtigen Wassertrog allein exakt vorgenommen werden kann, ohne durch nachheriges Einsenken des Filters erheblich geschädigt zu werden.

---

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 27. p. 537. 1908; 29. p. 625. 1909; H. M. Randall, Ann. d. Phys. 33. p. 739. 1910; Astrophysical Journ. 34. July 1911.

Sämtliche Filter von Wratten & Wainwright lassen in Form von Gelatineschichten etwa 88 Proz. der Heliumstrahlung  $1,083 \mu$  und 70 bis 75 Proz. der Heliumstrahlung  $2,058 \mu$  hindurch. Je zwei von ihnen, welche kombiniert das sichtbare Licht völlig absorbieren, würden mit einer 1 cm dicken Wasserschicht zur Isolierung von  $1,083$  ebenso brauchbar sein, wie die zwei gewählten *F* und *H*. Es gibt viele weitere derartige Kombinationen. Keinerlei rotes Licht lassen 28 und 44 kombiniert hindurch. Das Ultrarotfilter von Wood, welches diese Firma liefert, läßt dagegen nur 18 Proz. von  $1,083 \mu$  und 7 Proz. von  $2,058 \mu$  hindurch. Sein Durchlässigkeitsmaximum liegt bei kürzerer Wellenlänge.



Die Zeichnung stellt die spektrale Durchlässigkeit eines Filters nach Anordnung 1 unter Benutzung der Filter 29 und 45 (cemented in optical glass „B“) in Prozenten der einfallenden Strahlung dar. Die Kurve ist mittels Nernststiftes als Energiequelle und mit einem Quarzprismen-Spektrobolometer beobachtet.

Das Filter läßt danach zwischen  $0,890$  und  $0,910 \mu$  sowie zwischen  $1,040$  und  $1,080 \mu$  etwa 70 Proz.<sup>1)</sup> durch, dazwischen bei  $0,97 \mu$  nur 52 Proz. Die Durchlässigkeit fällt auf 25 Proz. bei  $0,814 \mu$  und  $1,166 \mu$  und auf 2,5 Proz. bei  $0,71 \mu$  und  $1,36 \mu$ .

1) Ohne Wasser etwa 85 Proz. Durchlässigkeit des kombinierten Filters.

Das Filter isoliert z. B. folgende Strahlungen:

	$\lambda$ isoliert	Durchl. %
Heliumlampe . . . . {	10830,3 Å.-E.	69,3
	Doppellinie	
Quarz-Cadmiumlampe . {	10395,2 Å.-E.	69,5
	einfache Linie	
Quarz-Zinklampe : . . {	11055,4 Å.-E.	62,5
	13055,6 Å.-E.	18,3

Die genannten Linien der Heliumlampe und Quarz-Cadmium-Vakuumlampe, welche die stärksten dieser Lichtquellen sind, werden demnach monochromatisch durchgelassen. Aus der Quarz-Zink-Vakuumlampe siebt das Filter eine Strahlung, die zu 88 Proz. aus dem Lichte der stärksten Zinklinie 11055 besteht, und der noch etwa 12 Proz. Licht der weniger als halb so intensiven Linie 13055,6 beigemischt ist. Auch in anderen Fällen wird nahezu monochromatische Strahlung erhalten, z. B. mit dem Aluminiumbogen hauptsächlich 11255,5, mit der Quecksilberlampe hauptsächlich 10140,1. Das Hauptanwendungsgebiet betrifft die Heliumlampe, deren nächststärkste einfache Linie 20582 Å.-E. außerdem durch ein anderes Filter isolierbar ist, welches Hr. Ignatieff hier ausgearbeitet hat und beschreiben wird. Derselbe wird zugleich als eine erste Anwendung dieser Filter die interferometrische Messung ultraroter Wellenlängen veröffentlichen, eine Messung, welche mit einer spektralen Aussonderung der Linien wohl sehr schwierig gewesen wäre.

(Eingegangen 8. Januar 1914.)

**3. Über den Einfluß der Dämpfung  
auf die Beugung elektrischer Wellen an einem  
dielektrischen Zylinder;  
von Kobayashi-Iwao.**

Das Problem der Beugung elektrischer Wellen an einem Zylinder ist schon vielfach behandelt worden. Darunter wurde der Fall eines dielektrischen Zylinders von Cl. Schaefer und F. Grossmann theoretisch und experimentell behandelt.<sup>1)</sup> Trotz der außerordentlich genauen Versuche stimmte das experimentelle Resultat mit dem theoretischen nicht ganz überein, sondern es zeigte sich dazwischen eine nicht zu vernachlässigende Abweichung. Diese war besonders in dem Falle zu bemerken, daß die relative Intensität der Schwingung, die durch die dem Zylinder parallel einfallende Erregung erzeugt wird, bei verschiedenen Radien des Zylinders hinter diesem in einer bestimmten Entfernung gemessen wurde. Nehmen wir als Abszissen die Radien des Zylinders und als Ordinaten die relativen Intensitäten und ziehen eine Kurve, dann verläuft die theoretische Kurve wie die Kurve *b* in der Figur (p. 892), während die experimentell gefundene Kurve wie *a*.

Obwohl es nach der Theorie, wie die Kurve *b* zeigt, doppelt unendlich viele Werte des Radius geben muß, für die eine Resonanzerscheinung auftreten sollte, zeigte sich in der experimentell bestimmten Kurve *a* nur die erste Resonanzstelle, während an der Stelle, wo die zweite starke Resonanz vorhanden sein sollte, fast keine Spur davon zu bemerken war. Schaefer diskutierte nun folgende Erklärungsmöglichkeiten:

1. Beim Experiment wurden nicht vollkommen ungedämpfte Wellen benutzt, sondern solche Wellenzüge, deren jeder aus

1) Cl. Schaefer u. F. Grossmann, Untersuchung über die Beugung elektromagnetischer Wellen an dielektrischen Zylindern. *Ann. d. Phys.* 31. p. 455. 1910.

einigen gedämpften Schwingungen und einer Pause besteht, aber nach einer gewissen Zeitdauer periodisch immer wieder frisch von einem Induktorium geliefert wird, während die Theorie nur für die ungedämpften Wellen ausgearbeitet war.

2. Die zweite Resonanz spielt sich, wie die Kurve *b* zeigt, in einem sehr engen Bereich des Radius ab, etwa von 0,99 bis 1,02 cm, während die käuflich erhältlichen Glasröhren nie bis auf  $\frac{1}{100}$  cm gleichmäßig dick waren. Infolgedessen ist die Beobachtung an dieser Stelle außerordentlich erschwert, da man einen undefinierbaren Mittelwert beobachtet.

Von diesen beiden Gründen ist aber der zweite weniger wahrscheinlich. Denn erstens hätte man doch unter den vielen Beobachtungen einige richtige Werte haben müssen, was hier aber nicht der Fall war. Zweitens, da die Intensität in diesem engen Bereich des Radius nicht sehr viele dicht nebeneinander liegende, sondern nur ein steiles Maximum und Minimum besitzt, müßte der Mittelwert selbst doch manchmal zu groß und manchmal zu klein ausfallen, je nach dem Bereich, über das der Mittelwert genommen wird; auch dies wurde durch das Experiment nicht bestätigt.

Wir können daher schließen, daß die Diskrepanz zwischen Experiment und Theorie verschwinden würde, wenn wir in der Theorie die einfallenden Wellen als gedämpft voraussetzen, wie es dem Experiment entspricht.

Der wesentliche Unterschied dieser Theorie gegen die frühere, der durch die Voraussetzung solcher gedämpften einfallenden Wellen entsteht, besteht darin, daß bei der früheren Theorie die stets gedämpften Eigenschwingungen vernachlässigt werden dürfen, während dies bei unserer Theorie nicht statthaft ist. Denn da die einfallenden Schwingungen (die elektrischen Kräfte) bei der früheren Theorie vollkommen ungedämpft und deshalb nebst ihren Ableitungen immer als stetig angenommen sind, ändern sich die durch sie erzeugten freien und erzwungenen Schwingungen des Zylinders mit ihren Ableitungen gleichfalls nie unstetig. Daher klingen die stets gedämpften Eigenschwingungen nach einiger Zeit fast vollständig ab, und das System erreicht einen „stationären“ Zustand, in dem nur die erzwungenen Schwingungen zu betrachten sind.

Bei unserer neuen Theorie ist es anders. Die einfallende

Erregung besteht jetzt aus periodisch vom Induktorium gelieferten gedämpften Wellenzügen. Der einzelne Wellenzug der elektrischen Kraft ist von den vorhergehenden und nachfolgenden unabhängig, und daher sind seine Ableitungen selbst nicht immer stetig, da er aus einigen Schwingungen und einer Pause besteht. *Daher werden jedesmal sowohl die freien als auch die erzwungenen Schwingungen frisch erzeugt, wenn ein neuer Wellenzug am Zylinder eintrifft oder wenn seine Ableitungen unstetig werden. Die Eigenschwingungen können daher in keinem Fall vernachlässigt werden.*

Sei das System zuerst ganz in Ruhe. Wenn ein Wellenzug ankommt, erzeugt er sowohl die freien als auch die erzwungenen Schwingungen. Im Augenblick, in dem der zweite Wellenzug am Zylinder eintrifft, ist das System nicht in Ruhe, wie am Anfang des ersten Vorganges, sondern die elektrische Kraft und ihre Zeitderivierte haben von Null verschiedene Werte. Da der zweite Wellenzug von dem ersten unabhängig ist, erzeugt er wieder die beiden Arten von Schwingungen ganz unabhängig, und das System nimmt einen wieder anderen Anfangszustand an für den dritten Vorgang usw. Nach einer gewissen Zeit jedoch strebt der Anfangszustand, sich einem bestimmten Wert anzunähern, und endlich erreicht das ganze System einen „quasistationären“ Zustand; dieser ist aber von dem der früheren Theorie ganz verschieden und hat dieselbe Periode, wie die der hintereinander einfallenden Wellenzüge.

Wenn wir diesen quasistationären Zustand betrachten, können wir uns nur auf eine Periode beschränken, in der der Wellenzug nach dem obigen nur einmal einfällt und die beiden Arten von Schwingungen erzeugt, da nach dem Ende dieser Periode derselbe Vorgang wiederholt wird.

#### § 1. Differentialgleichungen und Randbedingungen.

Wir beschränken uns auf den Fall, in dem die einfallende elektrische Kraft zur Achse des Zylinders parallel ist.

Nehmen wir die Achse des Zylinders zur  $z$ -Achse und auf einer zu ihr senkrechten Ebene Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$ . Setzen wir voraus, daß der Zylinder unendlich lang sei, dann treten wegen der Symmetrieeigenschaften des Problems nur die  $z$ -Komponente der elektrischen und die  $r$ - und  $\varphi$ -Komponenten

der magnetischen Kraft auf, und die anderen fallen alle fort. Da wir hier nur mit der elektrischen Kraft zu tun haben, beschränken wir uns auf diese und bezeichnen die  $z$ -Komponente durch  $\mathcal{E}$ .

Dann ergibt sich aus den Maxwellschen Gleichungen:

$$(1a) \quad \frac{\varepsilon_i \mu_i}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_i}{\partial \varphi^2},$$

$$(1b) \quad \frac{\varepsilon_a \mu_a}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_a}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}_a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_a}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_a}{\partial \varphi^2};$$

die Größen, die mit dem Index  $i$  versehen sind, beziehen sich auf den Innenraum des Zylinders und die mit dem Index  $a$  auf den Außenraum.  $\varepsilon$  und  $\mu$  bedeuten die Dielektrizitätskonstante und die Permeabilität des Mediums; für den Außenraum sind  $\varepsilon_a = \mu_a = 1$ , da das Medium Luft ist, während für den Innenraum des Zylinders nur  $\mu_i = 1$  ist. Wir bezeichnen später  $\varepsilon_i$  durch  $\varepsilon$ .  $c$  ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Auf der Oberfläche des Zylinders müssen die zwei Bedingungen der Kontinuität der Tangentialkomponente der elektrischen und der magnetischen Kraft erfüllt sein.

Sie sind in unserem Fall folgende:

$$(2) \quad \overline{\mathcal{E}_a} = \overline{\mathcal{E}_i}, \quad \left( \frac{\partial \mathcal{E}_a}{\partial r} \right) = \left( \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial r} \right)^1;$$

die Größen mit Querstrich bedeuten die Werte auf der Oberfläche des Zylinders.

## § 2. Eigenschwingungen.

Wir wollen zuerst die Eigenschwingungen betrachten.

Die Integrale von (1) sind durch Zylinderfunktionen darstellbar, und zwar sind für den Außenraum nur solche brauchbar, die nach außen fortschreitende Wellen darstellen, da hier in großer Entfernung eine Entstehung nach innen fortschreitender oder dadurch erzeugbarer stehender Wellen ausgeschlossen

1) Die zweite Gleichung ist aus der Kontinuität der Tangentialkomponente magnetischer Kraft abgeleitet, und zwar braucht für eine Anzahl von isolierten Werten der Variablen nicht erfüllt zu sein, wenn die freien oder erzwungenen Schwingungen einzeln betrachtet werden. Dies übt keinen Einfluß auf das Ergebnis von § 3 aus.



ist, während im Innenraum nur solche anwendbar sind, die die Feldstärken nicht unendlich groß werden lassen.

Wir nehmen daher als die einzig brauchbare Zylinderfunktion für den Innenraum  $J_m$  und für den Außenraum  $H_m^{(2)}$ , die folgendermaßen definiert sind:<sup>1)</sup>

Sei  $m$  eine positive ganze Zahl, dann ist:

$$J_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(m+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu},$$

$$H_m^{(1)}(z) = J_m(z) + iN_m(z), \quad H_m^{(2)}(z) = J_m(z) - iN_m(z),$$

wo

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} N_m(z) = & J_m(z) \log \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^\nu}{\nu!(m+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \left( \sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \sum_{\lambda=1}^{\nu+m} \frac{1}{\lambda} \right) \right] + \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(m-\nu-1)!}{\nu!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \right\}, \end{aligned}$$

und

$$\log \gamma = \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right\} = 0,57722 \dots$$

Wir bekommen als partikuläre Lösung der Differentialgleichungen (1) für beide Räume

$$(3a) \quad \mathfrak{E}_a = C_m e^{iqct} H_m^{(2)}(qr) \cos m\varphi,$$

$$(3b) \quad \mathfrak{E}_i = D_m e^{iqct} J_m(\sqrt{\varepsilon} qr) \cos m\varphi;$$

$m$  ist eine positive ganze Zahl,  $C_m$  und  $D_m$  sind von  $r$ ,  $\varphi$  und  $t$  unabhängige beliebige komplexe Konstanten und  $q$  ist eine noch zu bestimmende komplexe Größe.

$\sin m\varphi$  kommt in der Lösung (3) nicht vor, da die Feldstärke in bezug auf die Anfangslinie  $\varphi = 0$  symmetrisch ist.

Durch die Einführung der Randbedingungen (2) ergeben sich folgende Gleichungen:

1) E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, p. 94 ff., 1904.

2) Die von Ignatowsky eingeführte Zylinderfunktion  $Q_m(x)$ , die in der Arbeit von C. Schaefer u. F. Großmann benutzt wurde, ist gleich  $i(\pi/2) H_m^{(2)}(x)$ , ist also von  $H_m^{(2)}(x)$  nur durch einen konstanten Faktor  $i(\pi/2)$  verschieden.

$$(4) \quad \begin{cases} C_m H_m^{(2)}(q\rho) - D_m J_m(\sqrt{\varepsilon} q\rho) = 0, \\ C_m H_m^{(2)'}(q\rho) - \sqrt{\varepsilon} D_m J_m'(\sqrt{\varepsilon} q\rho) = 0, \end{cases}$$

in denen  $\rho$  der Radius des Zylinders ist.

Diese zwei Gleichungen können nur dann durch von Null verschiedene Werte von  $C_m$  und  $D_m$  befriedigt werden, wenn  $q$  die folgende Bedingung erfüllt:

$$\sqrt{\varepsilon} H_m^{(2)}(q\rho) J_m'(\sqrt{\varepsilon} q\rho) - H_m^{(2)'}(q\rho) J_m(\sqrt{\varepsilon} q\rho) = 0.$$

Nach kurzer Umrechnung mit Hilfe der bekannten Rekursionsformeln<sup>1)</sup> zwischen Zylinderfunktionen und ihren Derivierten bekommen wir

$$(5) \quad \sqrt{\varepsilon} H_m^{(2)}(q\rho) J_{m+1}(\sqrt{\varepsilon} q\rho) - H_{m+1}^{(2)}(q\rho) J_m(\sqrt{\varepsilon} q\rho) = 0.$$

Da diese Gleichung für jeden positiven ganzen Wert von  $m$  gilt und jede derselben unendlich viele komplexe Wurzeln hat, so ist die gesamte Anzahl der Wurzeln, also der möglichen Werte von  $q$  doppelt unendlich groß.

Wir unterscheiden jetzt diese doppelunendlich vielen Wurzeln folgendermaßen. Wir geben zuerst den Wurzeln der Gleichung (5) für die spezielle Ordnung  $m$  einen unteren Index  $m$ . Wir trennen dann unter den mit dem unteren Index  $m$  versehenen Wurzeln die mit positivem reellem Teil von denen mit negativem reellem Teil, ordnen die ersteren nach steigenden Werten des reellen Teils an. Dann erhält die Wurzel, die den kleinsten positiven reellen Teil hat, also an der Spitze der Reihe steht, den oberen Index (1); im allgemeinen erhält die  $s$ te Wurzel dieser Reihe den oberen Index ( $s$ ). Ebenso ordnen wir die Wurzeln mit negativem reellem Teil nach steigenden absoluten Werten desselben an, und die  $s$ te Wurzel dieser Reihe erhält den oberen Index ( $-s$ ).

Wir bezeichnen die  $s$ te Wurzel  $m$ ter Ordnung durch  $q_m^{(s)}$ , und die zugehörigen Konstanten  $C_m$  und  $D_m$  von (4) durch  $C_m^{(s)}$  und  $D_m^{(s)}$ .

Setzen wir

$$(6) \quad \rho q_m^{(s)} = \alpha_m^{(s)} + i\beta_m^{(s)},$$

1) E. Jahnke u. F. Emde, p. 165.

bezeichnen wir ferner durch  $\overline{q_m^{(s)}}$  die mit  $q_m^{(s)}$  konjugiert komplexe Zahl, dann ist

$$\rho \overline{q_m^{(s)}} = \alpha_m^{(s)} - i \beta_m^{(s)}.$$

Es ist mit Hilfe der Eigenschaften der Zylinderfunktion leicht zu beweisen, daß die Funktion

$$(7) \quad F_m(z) = \sqrt{\varepsilon} H_m^{(2)}(z) J_{m+1}(\sqrt{\varepsilon} z) - H_{m+1}^{(2)}(z) J_m(\sqrt{\varepsilon} z)$$

den konjugiert komplexen Wert annimmt, wenn in ihr das komplexe Argument  $z$  durch den negativen konjugiert komplexen Wert  $-\bar{z}$  ersetzt wird. Wenn daher  $z$  eine Wurzel von  $F_m(z) = 0$  ist, ist  $-\bar{z}$  auch eine.

Daher ist  $-\overline{q_m^{(s)}}$  eine Wurzel von (7). Da aber alle Wurzeln von (7) durch  $q_m^{(s)}$  zu bezeichnen sind und  $-\overline{q_m^{(s)}}$  negativen reellen Teil hat, muß

$$-\overline{q_m^{(s)}} = q_m^{(-s)}$$

sein. Daher können wir jetzt die Wurzeln mit positivem reellem Teil durch  $q_m^{(s)}$  und die mit negativem reellem Teil durch  $-\overline{q_m^{(s)}}$  bezeichnen.

Die Beziehung zwischen der Eigendämpfung  $k_m^{(s)}$ , Eigenschwingungszahl  $n_m^{(s)}$  und  $q_m^{(s)}$  ist:

$$(8) \quad q_m^{(s)} = n_m^{(s)} + i k_m^{(s)} = \frac{1}{\rho} (\alpha_m^{(s)} + i \beta_m^{(s)}),$$

$$(9) \quad n_m^{(s)} = \frac{\alpha_m^{(s)}}{\rho}, \quad k_m^{(s)} = \frac{\beta_m^{(s)}}{\rho}.$$

Wenn  $\rho |q_m^{(s)}| = \sqrt{\alpha_m^{(s)2} + \beta_m^{(s)2}}$  gegen  $m$  groß ist, kann  $q_m^{(s)}$  mit Benutzung des asymptotischen Ausdrucks von  $J_m$  und  $H_m^{(2)}$  bestimmt werden.

Die  $s$ te Wurzel  $m$ ter Ordnung  $q_m^{(s)}$  ist dann:

$$\sqrt{\varepsilon} \rho q_m^{(s)} = \frac{4s + 2m - 3}{4} \pi + \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{\varepsilon} + 1}{\sqrt{\varepsilon} - 1} i,$$

also

$$(10) \quad \alpha_m^{(s)} = \rho n_m^{(s)} = \frac{4s + 2m - 3}{4 \sqrt{\varepsilon}} \pi,$$

$$(11) \quad \beta_m^{(s)} = \rho k_m^{(s)} = \frac{1}{2 \sqrt{\varepsilon}} \log \frac{\sqrt{\varepsilon} + 1}{\sqrt{\varepsilon} - 1}.$$

Da  $\varepsilon$  für alle isolierenden Substanzen größer als 1 ist, ist die Formel (11) für  $\beta_m^{(s)}$  in die Potenzreihe von  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$  entwickelbar:

$$\beta_m^{(s)} = \rho k_m^{(s)} = \frac{1}{s} \left\{ 1 + \frac{1}{3\varepsilon} + \frac{1}{5\varepsilon^2} + \dots \right\}.$$

Die Eigendämpfung  $k_m^{(s)}$  nähert sich daher mit wachsendem  $s$  dem bestimmten Grenzwert

$$\frac{1}{2\rho\sqrt{\varepsilon}} \log \frac{\sqrt{s+1}}{\sqrt{s-1}} = \frac{1}{\rho\varepsilon} + \frac{1}{3\rho\varepsilon^2} + \dots$$

an, der bei einem großen  $\varepsilon$  beinahe  $1/\rho\varepsilon$ , dem Reziproken des Produkts aus der Dielektrizitätskonstanten und dem Radius des Zylinders, gleich ist.

Sei das Medium des Innenraumes Wasser, dann ist

$$\varepsilon = 81,$$

und der Grenzwert von  $\rho k_m^{(s)}$  ist

$$\beta_m^{(\infty)} = \rho k_m^{(\infty)} = 0,0124.$$

Einige Werte von  $\alpha_m^{(s)}$  und  $\beta_m^{(s)}$  sind für den Fall von Wasser folgende; die Eigenschwingungszahl und die Eigendämpfung sind durch (9) aus  $\alpha_m^{(s)}$  und  $\beta_m^{(s)}$  zu bekommen.

Die Werte von  $\alpha_m^{(s)}$  und  $\beta_m^{(s)}$  für  $m = 0$  und  $m = 1$ ,  $\varepsilon = 81$ :

Nummer der Wurzel (s)	m = 0		m = 1	
	$\alpha_0^{(s)}$	$\beta_0^{(s)}$	$\alpha_1^{(s)}$	$\beta_1^{(s)}$
1	0,0823	0,0248	0,2626	0,00451
2	0,4370	0,0147	0,6086	0,00787
3	0,7863	0,0136	0,9573	0,00966
4	1,135	0,0130	1,306	0,0107
5	1,483	0,0128	1,656	0,0112
$\infty$	$\frac{\pi}{36}(4s-3)$	0,0124	$\frac{\pi}{36}(4s-1)$	0,0124

Man sieht aus dieser Tabelle, daß die Grenzwerte (10) und (11) von  $\alpha_m^{(s)}$  und  $\beta_m^{(s)}$  bei  $s = 5$  schon ziemlich gut erreicht sind.

Die kleinsten positiven Werte von  $\alpha_m^{(s)}$  und die Werte des zugehörigen  $\beta_m^{(s)}$ , d. h.  $\alpha_m^{(1)}$  und  $\beta_m^{(1)}$  für verschiedene Ordnungszahlen  $m$  sind in der folgenden Tabelle enthalten:

Ordnungs- zahl $m$	$\alpha_m^{(1)}$	$\beta_m^{(1)}$
0	0,0823	0,0248
1	0,2626	0,0,451
2	0,4229	0,0,353
3	0,5688	0,0,17
4	0,7078	0,0,1

Die Integrale (3) erfüllen die Differentialgleichung (1) und die zwei Randbedingungen (2) nur, wenn  $q$  mit einem  $q_m^{(s)}$  identisch ist. Das allgemeine Integral der Eigenschwingung ist aus allen partikulären Lösungen (3) mit allen zulässigen Werten von  $q$  als Doppelreihe linear zusammenzusetzen.

Für beide Räume sind die allgemeinen Integrale

$$(12a) \quad \mathfrak{E}'_a = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} C_m^{(s)} e^{i q_m^{(s)} c t} H_m^{(2)}(q_m^{(s)} r) \cos m \varphi,$$

$$(12b) \quad \mathfrak{E}'_i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} D_m^{(s)} e^{i q_m^{(s)} c t} J_m(\sqrt{\varepsilon} q_m^{(s)} r) \cos m \varphi,$$

in denen  $C_m^{(s)}$  und  $D_m^{(s)}$  durch folgende Gleichung miteinander verbunden sind:

$$(13) \quad C_m^{(s)} H_m^{(2)}(q_m^{(s)} \rho) - D_m^{(s)} J_m(\sqrt{\varepsilon} q_m^{(s)} \rho) = 0.$$

Wir bezeichnen hier die Eigenschwingung durch  $\mathfrak{E}'$ , so daß man sie sowohl von der gesamten Schwingung  $\mathfrak{E}$  als auch von der im nächsten Paragraph zu betrachtenden erzwungenen Schwingung deutlich unterscheiden kann, welche letztere durch  $\mathfrak{E}''$  bezeichnet werden wird.

### § 3. Erzwungene Schwingungen.

Wir wollen zuerst den einfallenden Wellenzug analytisch ausdrücken. Bestehe der einfallende Wellenzug der elektrischen Kraft aus  $\mu$  gedämpften Schwingungen und einer Pause und sei die ganze Zeitdauer  $T$ . Sei die Dämpfung jeder Schwingung des Wellenzuges  $k$ , die Schwingungszahl  $n$ , die Schwingungsdauer  $\tau$  und die Anfangsamplitude  $a$ , und fallen die Wellenzüge in die Anfangslinie  $\varphi = 0$  von  $r = \infty$  nach der Zylinderachse

ein. Dann sind diese Wellenzüge folgendermaßen auszu-  
drücken:

$$(14) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_{\infty} = a e^{-k(r \cos \varphi + ct - \nu T)} \cos \left\{ n(r \cos \varphi + ct - \nu T) - \frac{\pi}{2} \right\}, \\ \text{für die Zeit } \nu T < t + \frac{r \cos \varphi}{c} < \nu T + \mu \tau, \\ \text{und} & \mathfrak{E}_{\infty} = 0 \\ \text{für die Zeit } \mu \tau + \nu T < t + \frac{r \cos \varphi}{c} < (\nu + 1) T; \end{cases}$$

$\nu$  ist eine beliebige ganze Zahl. Wir betrachten daher jetzt den Zustand in der  $\nu^{\text{ten}}$  Periode des Vorgangs, in der der  $\nu^{\text{te}}$  Wellenzug am Zylinder eintrifft.

$\mathfrak{E}_{\infty}$  ist bequemer komplex darzustellen.

Setzen wir

$$(15) \quad p = n + i k,$$

dann wird nach Weglassung des Symbols  $\Re$ , das den reellen Teil bedeutet,

$$(16) \quad \mathfrak{E}_{\infty} = a' e^{i p (r \cos \varphi + ct)},$$

und zwar ist:

$$(17) \quad \begin{cases} a' = a e^{-\frac{\pi}{2} - i p c \nu T} & \text{für } \nu T < t + \frac{r \cos \varphi}{c} < \nu T + \mu \tau, \\ a' = 0 & \text{für } \nu T + \mu \tau < t + \frac{r \cos \varphi}{c} < (\nu + 1) T. \end{cases}$$

$\mathfrak{E}_{\infty}$  kann in eine nach Besselschen Funktionen erster Art  $J_m$  fortschreitende Reihe entwickelt werden:<sup>1)</sup>

$$(18) \quad \mathfrak{E}_{\infty} = a' e^{i p ct} \sum_{m=0}^{\infty} (2) i^m J_m(p r) \cos m \varphi;$$

der Faktor 2 in Klammer ist hier und später durch 1 zu ersetzen, wenn  $m = 0$  ist.

Wir wollen vorläufig annehmen, daß die Rechnung in unserem Fall genau so durchgeführt werden dürfe, wie in dem Fall der vollkommen ungedämpften einfallenden Schwingungen.<sup>2)</sup>

Setzen wir die erzwungene Schwingung des Außenraumes  $\mathfrak{E}_a''$ ,

$$(19) \quad \mathfrak{E}_a'' = \mathfrak{E}_{\infty} + \mathfrak{E}_{a1}'';$$

1) A. Gray and G. B. Mathews, A treatise on Bessels functions p. 18. 1895.

2) Cl. Schaefer u. F. Grossmann, Ann. d. Phys. p. 31, 455. 1910.

da  $\mathfrak{E}_\infty$ , das bei der Abwesenheit des Zylinders unmittelbar gleich  $\mathfrak{E}_a''$  sein würde, der Differentialgleichung (1a) genügt, genügt dieser  $\mathfrak{E}_{a1}''$  auch, und zwar da  $\mathfrak{E}_{a1}''$  diejenige störende Schwingung darstellt, die von  $\mathfrak{E}_\infty$  durch die Beugung am Zylinder erzeugt wurde, ist sie aus demselben Grunde wie bei den Eigenschwingungen durch  $H_m^{(2)}$  auszudrücken.

Daher ist der Ausdruck der erzwungenen Schwingung des Außenraumes

$$(20a) \quad \mathfrak{E}_a'' = a' e^{ip(r \cos \varphi + ct)} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m e^{ipct} H_m^{(2)}(pr) \cos m\varphi.$$

Für den Innenraum ist nur  $J_m$  anwendbar, daher ist

$$(20b) \quad \mathfrak{E}_i'' = \sum_{m=0}^{\infty} B_m e^{ipct} J_m(\sqrt{\varepsilon} pr) \cos m\varphi.$$

$A_m$  und  $B_m$  sind von  $t$ ,  $r$  und  $\varphi$  unabhängige komplexe Konstanten und durch die Randbedingungen (2) zu bestimmen.

Da die Randbedingungen bei den erzwungenen Schwingungen unabhängig von freien Schwingungen zu befriedigen sind, setzen wir (20a) und (20b) in (2) ein und setzen dann alle Summen der Glieder, die den Faktor  $e^{ipct} \cos m\varphi$  gemeinsam besitzen, gleich Null, dann bekommen wir für jedes  $m$  folgende zwei Gleichungen:

$$B_m J_m(\sqrt{\varepsilon} p \varrho) - A_m H_m^{(2)}(p \varrho) - (2)i^m a' J_m(p \varrho) = 0,$$

$$\sqrt{\varepsilon} B_m J_m'(\sqrt{\varepsilon} p \varrho) - A_m H_m^{(2)'}(p \varrho) - (2)i^m a' J_m'(p \varrho) = 0.$$

Aus diesen zwei Gleichungen können die komplexen Konstanten  $A_m$  und  $B_m$  bestimmt werden und zwar mit Hilfe der Rekursionsformel wie bei (5)

$$(21) \quad A_m = - (2)i^m a' \frac{\sqrt{\varepsilon} J_m(p \varrho) J_{m+1}(\sqrt{\varepsilon} p \varrho) - J_{m+1}(p \varrho) J_m(\sqrt{\varepsilon} p \varrho)}{F_m(p \varrho)},$$

$$(22) \quad B_m = \frac{(2) 2 i^{m-1} a'}{\pi p \varrho F_m(p \varrho)},$$

wo  $F_m(p \varrho)$  schon durch (7) definiert ist.

#### § 4. Die Konstanten $A_m$ und $B_m$ .

Das Verfahren der Bestimmung der Konstanten  $A_m$  und  $B_m$  ist genügend, wenn die Ableitungen der einfallenden Er-



regung stetig sind, und der stationäre Zustand betrachtet wird. In unserem Fall ist keine dieser Bedingungen erfüllt, daher sind weitere Bemerkungen erforderlich.

Die Schwingungen  $\mathcal{E}_\infty$ ,  $\mathcal{E}_a''$  und  $\mathcal{E}_i''$  sind, wie sie sich in (18), (20a) und (20b) zeigen, durch eine Summe von Schwingungen dargestellt, deren jede der Gleichung (1a) oder (1b) und den Randbedingungen (2) genügt. Da an der Bestimmung der Konstanten  $A_m$  und  $B_m$  sich nur die  $m$ ten Schwingungen beteiligen, können wir uns auf diese beschränken, um  $A_m$  und  $B_m$  näher zu untersuchen.

Da in unserem Fall die Amplitude der einzelnen einfallenden Schwingung  $2i^m a' e^{ipct} J_m(pr) \cos m\varphi$  nach (17) unstetig ist, müssen die Amplituden  $A_m$  und  $B_m$  der gebeugten einzelnen Schwingungen auch unstetig sein, und diese Eigenschaft wird auch mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der betreffenden Schwingung fortgepflanzt. Die Schwingung ist aber gewöhnlich nicht einfach fortschreitend, und es ist nicht immer möglich, sie in einzelne fortschreitende Wellen zu zerlegen und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu finden, außer bei einigen speziellen Fällen.

In der Amplitude der einfallenden Schwingung nimmt  $a'$  auf der Oberfläche des Zylinders nach (17) folgende Werte an:

$$a' = a e^{-i\frac{\pi}{2} - ipcvT} \quad \text{für} \quad vT < t + \frac{q \cos \varphi}{c} < vT + \mu\tau, \\ = 0 \quad \text{,,} \quad vT + \mu\tau < t + \frac{q \cos \varphi}{c} < (v+1)T.$$

Wir wollen jetzt an Stelle von  $\frac{q \cos \varphi}{c}$  den Mittelwert Null setzen. Es bedeutet, daß die einfallende Welle auf der Oberfläche des Zylinders in allen Punkten gleichzeitig ankomme, was in dem Fall, in dem die Wellenlänge der einfallenden Welle gegen den Radius des Zylinders groß ist, nur einen kleinen Fehler bringt.

Dann nimmt  $a'$  in (16) folgende Werte auf der Oberfläche an:

$$(23) \quad \begin{cases} a' = a e^{-i\frac{\pi}{2} - ipcvT} & \text{für} \quad vT < t < vT + \mu\tau, \\ = 0 & \text{für} \quad vT + \mu\tau < t < (v+1)T. \end{cases}$$

Wir nehmen ferner an, daß die einfallende Erregung sich in dem Augenblick im ganzen Zylinder verbreite, in dem sie

an diesem eintritt. Es ist eine ziemlich grobe Annäherung, aber wenn das Verhältnis  $\frac{\text{Radius des Zylinders}}{\text{Wellenlänge}}$  nicht groß ist, ist es doch nicht ganz unrecht.

Dann nimmt ohne weiteres  $a'$  in  $B_m$  (22) dieselben Werte an wie in (23).

Wir betrachten nun  $A_m e^{ipct} H_m^{(2)}(pr) \cos m\varphi$ , die Schwingung des Außenraumes.

Die Wellengleichung (1a) kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\frac{\partial^2 (\mathfrak{E}_a'' \sqrt{r})}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (\mathfrak{E}_a'' \sqrt{r})}{\partial r^2} + \frac{c^2}{r^2} \left( \frac{\mathfrak{E}_a'' \sqrt{r}}{4} + \frac{\partial^2 (\mathfrak{E}_a'' \sqrt{r})}{\partial \varphi^2} \right).$$

Wenn  $r^2$  gegen 1 und  $\frac{\partial^2 (\mathfrak{E}_a \sqrt{r})}{\partial \varphi^2}$  groß ist, können wir das zweite Glied gegen das erste vernachlässigen und bekommen als allgemeine Lösung

$$(24) \quad \mathfrak{E}_a'' = \frac{1}{\sqrt{r}} f(r - ct).$$

Daher ist die Schwingung für großes  $r^2$  gegen 1 und  $\frac{\partial^2 (\mathfrak{E}_a \sqrt{r})}{\partial \varphi^2}$  radial nach außen fortschreitend mit der Geschwindigkeit  $c$ , und die Zeit, in der sie sich vom Zylinder aus bis  $r = r$  fortpflanzt, kann annäherungsweise gleich  $r/c$  gesetzt werden. Dies weicht mehr und mehr von dem richtigen Wert ab, wenn  $r$  gegen 1 und  $\frac{\partial^2 (\mathfrak{E}_a \sqrt{r})}{\partial \varphi^2}$  nicht mehr so groß wird.

Da in der Tat der Meßapparat dem Zylinder nicht nahe gestellt werden kann, können wir uns auf ein solches vom Zylinder etwas entferntes Gebiet beschränken, in dem diese Bedingung einigermaßen erfüllt wird.

Wir können dann an Stelle von  $H_m^{(2)}(pr)$  den asymptotischen Ausdruck einführen:

$$H_m^{(2)}(pr) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\pi pr}} e^{-i \left\{ pr - \frac{2m+1}{4}\pi \right\}} \left\{ 1 - i \frac{4m^2 - 1}{8pr} + \dots \right\}.$$

Dann wird:

$$\begin{aligned} A_m e^{ipct} H_m^{(2)}(pr) \cos m\varphi \\ = A_m \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i \frac{2m+1}{4}\pi} \frac{e^{ip(ct-r)}}{\sqrt{pr}} \cos m\varphi + \dots \right\}, \end{aligned}$$

wo das erste Glied eine spezielle Form von (24) ist, wenn  $r$  gegen 1 und  $m$  groß ist.

Daher nimmt der Faktor  $a'$  in  $A_m$  (21) für kleines  $m$  gegen  $r$  folgende Werte an:

$$\begin{aligned} a' &= a e^{-i\frac{\pi}{2} - i p c v T} \quad \text{für} \quad v T < t - \frac{r}{c} < v T + \mu \tau, \\ &= 0 \quad \text{für} \quad v T + \mu \tau < t - \frac{r}{c} < (v+1) T. \end{aligned}$$

Daher werden:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} A_m &= -(2) i^m a' \frac{\sqrt{\varepsilon} J_m(p q) J_{m+1}(\sqrt{\varepsilon} p q) - J_{m+1}(p q) J_m(\sqrt{\varepsilon} p q)}{F_m(p q)}, \\ a' &= a e^{-i\frac{\pi}{2} - i p c v T} \quad \text{für} \quad v T < t - \frac{r}{c} < v T + \mu \tau, \\ &= 0 \quad \text{für} \quad v T + \mu \tau < t - \frac{r}{c} < (v+1) T, \end{aligned} \right.$$

nur wenn  $m$  gegen  $r$  klein ist;

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} B_m &= \frac{(2) 2 i^m - 1}{\pi p q F_m(p q)} a', \\ a' &= a e^{-i\frac{\pi}{2} - i p c v T} \quad \text{für} \quad v T < t < v T + \mu \tau, \\ &= 0 \quad \text{für} \quad v T + \mu \tau < t < (v+1) T, \end{aligned} \right.$$

wenn der Radius des Zylinders klein ist.

#### § 5. Bestimmung der Konstanten $C_m^{(s)}$ und $D_m^{(s)}$ .

Der Ausdruck des gesamten Schwingungen  $\mathfrak{E}$  ist aus den freien  $\mathfrak{E}'$  (12) und erzwungenen Schwingungen  $\mathfrak{E}''$  (20) linear zusammzusetzen. Wenn wir in (12a) auch an Stelle von  $H_m^{(2)}(q_m^{(s)} r)$  den asymptotischen Ausdruck für große Argumente einsetzen, bekommen wir für beide Räume:

$$(27a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_a &= a' e^{i p (r \cos \varphi + c t)} + \frac{e^{i p (c t - r)}}{\sqrt{p r}} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i \frac{2m+1}{4} \pi} A_m \cos m \varphi \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{i q_m^{(s)} (c t - r)}}{\sqrt{q_m^{(s)} r}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i \frac{2m+1}{4} \pi} C_m^{(s)} \cos m \varphi, \end{aligned} \right.$$

$$(27b) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_i &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m e^{i p c t} J_m(\sqrt{\varepsilon} p r) \cos m \varphi \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} D_m^{(s)} e^{i q_m^{(s)} c t} J_m(\sqrt{\varepsilon} q_m^{(s)} r) \cos m \varphi. \end{aligned} \right.$$

Unter den Konstanten sind  $a'$ ,  $A_m$  und  $B_m$  schon bekannt. Jede Konstante  $C_m^{(s)}$  ist von  $D_m^{(s)}$  nach (13) abhängig und zwar ist die letztere durch die Anfangsbedingungen noch zu bestimmen. Es ist scheinbar auffällig, daß es nur eine Reihe disponibler Konstanten gibt, obwohl noch zwei Anfangsbedingungen zu erfüllen sind. Aber in der Tat existieren doch zwei Reihen von noch zu bestimmenden Konstanten, da alle  $D_m^{(s)}$  komplex sind.

Wir wollen jetzt andere Bedingungen suchen, damit die komplexen Konstanten  $D_m^{(s)}$  bestimmt werden können.

Da wir uns auf den quasistationären Zustand beschränken, muß der Zustand in  $t$  genau derselbe sein wie in  $t + T$ . Diese Bedingung ist aber schon von vornherein erfüllt, da  $a'$  für diesen Zweck bestimmt worden ist.

Wir wollen dann die Stetigkeit der Schwingung im Innenraum und im Außenraum untersuchen. Im Innenraum sind  $\mathcal{E}_i$  und  $\partial \mathcal{E}_i / \partial t$  ohne weiteres stetig, dagegen ist dies im Außenraum für  $\partial \mathcal{E}_a / \partial t$  nicht der Fall. Denn die freien und erzwungenen Schwingungen entstehen erst, nachdem die einfallende Schwingung am Zylinder eintrifft, und jene beiden Schwingungen haben keine Beziehung zu einer jetzt noch unterwegs befindlichen, nachkommenden einfallenden Schwingung, wenn diese sich auch an derselben Stelle befindet. Daher, wenn  $\partial \mathcal{E}_\infty / \partial t$  unstetig wird, muß  $\partial \mathcal{E}_a / \partial t$  auch unstetig werden. Dagegen müssen  $\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_\infty$  und  $\partial / \partial t (\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_\infty)$  überall stetig sein, da  $\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_\infty$  die Summe der freien und erzwungenen Schwingungen ist.

Daher müssen  $C_m^{(s)}$  und  $D_m^{(s)}$  auch in zwei Zeitpunkten unstetig werden, in denen  $A_m$  bzw.  $B_m$  nach (25) und (26) unstetig werden, damit  $\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_\infty$ ,  $\partial / \partial t (\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_\infty)$  und  $\mathcal{E}_i$ ,  $\partial \mathcal{E}_i / \partial t$  überall stetig bleiben können. Wie  $A_m$  und  $B_m$  zwei verschiedene Ausdrücke haben, müssen  $C_m^{(s)}$  und  $D_m^{(s)}$  für die zwei Zeitintervalle zwei Ausdrücke haben. Wir unterscheiden diese durch  $C_m^{(s)'}$  und  $C_m^{(s)''}$  bzw.  $D_m^{(s)'}$  und  $D_m^{(s)''}$ .

Wir beschränken uns jetzt auf  $D_m^{(s)}$ . Da  $D_m^{(s)}$ , genau so wie bei  $B_m$  (26), in  $t = \nu T$ ,  $t = \nu T + \mu \tau$ ,  $t = (\nu + 1)T$  unstetig wird, ergeben sich durch die Kontinuität von  $\mathcal{E}_i$  und  $\partial \mathcal{E}_i / \partial t$  folgende zwei Paare der Bedingungen:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_i(B_m, D_m^{(s)})_{t=\nu T} = \mathfrak{E}_i(0, D_m^{(s)})_{t=(\nu+1)T}, \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_i(B_m, D_m^{(s)})}{\partial t} \Big|_{t=\nu T} = \frac{\partial \mathfrak{E}_i(0, D_m^{(s)})}{\partial t} \Big|_{t=(\nu+1)T}, \end{array} \right.$$

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_i(B_m, D_m^{(s)})_{t=\nu T+\mu\tau} = \mathfrak{E}_i(0, D_m^{(s)})_{t=\nu T+\mu\tau}, \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_i(B_m, D_m^{(s)})}{\partial t} \Big|_{t=\nu T+\mu\tau} = \frac{\partial \mathfrak{E}_i(0, D_m^{(s)})}{\partial t} \Big|_{t=\nu T+\mu\tau}, \end{array} \right.$$

Da die Anzahl der Bedingungen und die Anzahl der zu bestimmenden Konstanten, je ein reeller und ein imaginärer Teil von  $D_m^{(s)'}$  und  $D_m^{(s)''}$  gleich vier ist, sind die Bedingungen für die Bestimmung der Konstanten notwendig und hinreichend.

Setzen wir den Ausdruck von  $\mathfrak{E}_i$  (27b) in diese vier Bedingungen ein, dann bekommen wir folgende vier Identitäten. Dabei ist besonders zu beachten, daß diese vier Bedingungen nicht von den beiden Teilen gleichzeitig, sondern nur von dem reellen Teil von  $\mathfrak{E}_i$  erfüllt werden sollen, da wir mit dem imaginären Teil von  $\mathfrak{E}_i$  nichts zu tun haben. Um dies zu betonen, wollen wir das Symbol  $\Re$  benutzen.

Dann bekommen wir:

$$\Re \epsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ B_m e^{ipcvT} J_m(\sqrt{\epsilon} pr) + \sum_{s=1}^{\infty} (D_m^{(s)'} - D_m^{(s)''} e^{iq_m^{(s)} cT}) e^{iq_m^{(s)} cvT} J_m(\sqrt{\epsilon} q_m^{(s)} r) \right\} \cos m\varphi = 0,$$

$$\Re \epsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ B_m e^{ipcvT} ip J_m(\sqrt{\epsilon} pr) + \sum_{s=1}^{\infty} (D_m^{(s)'} - D_m^{(s)''} e^{iq_m^{(s)} cT}) e^{iq_m^{(s)} cvT} i q_m^{(s)} J_m(\sqrt{\epsilon} q_m^{(s)} r) \right\} \cos m\varphi = 0,$$

$$\Re \epsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ B_m e^{ipc(\nu T+\mu\tau)} J_m(\sqrt{\epsilon} pr) + \sum_{s=1}^{\infty} (D_m^{(s)'} - D_m^{(s)''} e^{iq_m^{(s)} c(\nu T+\mu\tau)}) J_m(\sqrt{\epsilon} q_m^{(s)} r) \right\} \cos m\varphi = 0,$$

$$\Re e \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ B_m e^{i p c (\nu T + \mu \tau)} i p J_m (\sqrt{\varepsilon} p r) \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^{\infty} (D_m^{(s)'} - D_m^{(s)''}) e^{i q_m^{(s)} c (\nu T + \mu \tau)} i q_m^{(s)} J_m (\sqrt{\varepsilon} q_m^{(s)} r) \right\} \cos m \varphi = 0.$$

Wir setzen dann einmal

$$(30) \quad \begin{cases} D_m^{(s)} = (D_m^{(s)'} - D_m^{(s)''}) e^{i q_m^{(s)} c T} e^{i q_m^{(s)} c \nu T}, \\ B_m^{(0)} = B_m e^{i p c \nu T}, \end{cases}$$

und einmal

$$(31) \quad \begin{cases} D_m^{(s)} = (D_m^{(s)'} e^{i q_m^{(s)} c \mu \tau} - D_m^{(s)''} e^{i q_m^{(s)} c \mu \tau}) e^{i q_m^{(s)} c \nu T}, \\ B_m^{(0)} = B_m e^{i p c \nu T + i p c \mu \tau}. \end{cases}$$

Dann können wir die obigen vier Identitäten auf zwei zurückführen, und nachdem das einzelne Glied für jedes ganze  $m$  gleich Null gesetzt wird, bekommen wir:

$$\Re e \left\{ B_m^{(0)} J_m (\sqrt{\varepsilon} p r) + \sum_{s=1}^{\infty} D_m^{(s)} J_m (\sqrt{\varepsilon} q_m^{(s)} r) \right\} = 0,$$

$$\Re e \left\{ B_m^{(0)} i p J_m (\sqrt{\varepsilon} p r) + \sum_{s=1}^{\infty} D_m^{(s)} i q_m^{(s)} J_m (\sqrt{\varepsilon} q_m^{(s)} r) \right\} = 0. \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

Entwickeln wir in den beiden Identitäten  $J_m$  in die Potenzreihe von  $r$ , dann muß die Koeffiziente jeder Potenz von  $r$  im Gebiet  $0 < r < \rho$  verschwinden, nämlich:

$$J_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

$$\Re e \left\{ B_m^{(0)} p^{m+2n} + \sum_{s=1}^{\infty} D_m^{(s)} q_m^{(s)m+2n} \right\} = 0,$$

$$\Re e \left\{ B_m^{(0)} i p^{m+2n+1} + \sum_{s=1}^{\infty} D_m^{(s)} i q_m^{(s)m+2n+1} \right\} = 0. \quad \begin{matrix} m = 0, 1, 2 \dots \\ n = 0, 1, 2 \dots \end{matrix}$$

Setzen wir

$$(32) \quad \begin{cases} p = u e^{i\vartheta}, & q_m^{(s)} = u_m^{(s)} e^{i\varphi_m^{(s)}}, \\ B_m^{(0)} = |B_m^{(0)}| e^{i\beta_m}, & D_m^{(s)} = |D_m^{(s)}| e^{i\delta_m^{(s)}}, \end{cases}$$

dann werden:

$$\Re e \left\{ |B_m^{(0)}| u^{m+2n} e^{i(\beta_m + \overline{m+2n}\vartheta)} + \sum_{s=1}^{\infty} |D_m^{(s)}| u_m^{(s)m+2n} e^{i(\delta_m^{(s)} + \overline{m+2n}\varphi_m^{(s)})} \right\} = 0,$$

$$\Re e \left\{ |B_m^{(0)}| u^{m+2n+1} i e^{i(\beta_m + \overline{m+2n+1}\vartheta)} + \sum_{s=1}^{\infty} |D_m^{(s)}| u_m^{(s)m+2n+1} i e^{i(\delta_m^{(s)} + \overline{m+2n+1}\varphi_m^{(s)})} \right\} = 0.$$

Trennen wir den reellen Teil, dann:

$$|B_m^{(0)}| u^{m+2n} \cos(\beta_m + \overline{m+2n}\vartheta) + \sum_{s=1}^{\infty} |D_m^{(s)}| u_m^{(s)m+2n} \cos(\delta_m^{(s)} + \overline{m+2n}\varphi_m^{(s)}) = 0.$$

$$|B_m^{(0)}| u^{m+2n+1} \sin(\beta_m + \overline{m+2n+1}\vartheta) + \sum_{s=1}^{\infty} |D_m^{(s)}| u_m^{(s)m+2n+1} \sin(\delta_m^{(s)} + \overline{m+2n+1}\varphi_m^{(s)}) = 0.$$

$m = 0, 1, 2 \dots$   
 $n = 0, 1, 2 \dots$

Setzen wir:

$$(33) \quad \begin{aligned} |B_m^{(0)}| u^m e^{i(\beta_m + m\vartheta)} &= B_m^{(0)} p^m = a_m, \\ |B_m^{(0)}| u^m e^{-i(\beta_m + m\vartheta)} &= \overline{B_m^{(0)}} \overline{p^m} = b_m, \\ |D_m^{(s)}| u_m^{(s)m} e^{i(\delta_m^{(s)} + m\varphi_m^{(s)})} &= D_m^{(s)} q_m^{(s)m} = x_m^{(s)}, \\ |D_m^{(s)}| u_m^{(s)m} e^{-i(\delta_m^{(s)} + m\varphi_m^{(s)})} &= \overline{D_m^{(s)}} \overline{q_m^{(s)m}} = y_m^{(s)}, \end{aligned}$$

dann werden die beiden Ausdrücke:



$$\sum_{s=1}^{\infty} \left\{ x_m^{(s)} e^{i 2n \phi_m^{(s)}} + y_m^{(s)} e^{-i 2n \phi_m^{(s)}} \right\} u_m^{(s) 2n} + \left\{ a_m e^{i 2n \phi} + b_m e^{-i 2n \phi} \right\} u^{2n} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left\{ x_m^{(s)} e^{i (2n+1) \phi_m^{(s)}} - y_m^{(s)} e^{-i (2n+1) \phi_m^{(s)}} \right\} u_m^{(s) 2n+1} + \left\{ a_m e^{i (2n+1) \phi} - b_m e^{-i (2n+1) \phi} \right\} u^{2n+1} = 0.$$

Führen wir in diese Gleichungen  $1 = e^{i 2n\pi}$ ,  $-1 = e^{i (2n+1)\pi}$  ein, dann können wir diese zwei Gleichungen in eine Form vereinigen: d. h. für jedes ganze positive  $n$ :

$$(34) \quad \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ x_m^{(s)} e^{i n \phi_m^{(s)}} + y_m^{(s)} e^{i n (\pi - \phi_m^{(s)})} \right\} u_m^{(s) n} + \left\{ a_m e^{i n \phi} + b_m e^{i n (\pi - \phi)} \right\} u^n \right\} = 0.$$

Da es eine solche Gleichung für jeden ganzen Wert von  $m$  und  $n$  gibt, ist die Anzahl der Gleichungen doppelunendlich groß. Andererseits ist die Anzahl der unbekannten Größe  $x_m^{(s)}$  und  $y_m^{(s)}$  auch doppelunendlich. Und da zwei Arten der Bedingung und zwei Arten unbekannter Größe  $x_m^{(s)}$  und  $y_m^{(s)}$  sind, die aus dem reellen und dem imaginären Teil von  $D_m^{(s)}$  entstanden sind, müssen diese Größen durch die Gleichungen eindeutig bestimmt werden können.

Durch (32) können wir (34) folgendermaßen schreiben:

$$(34') \quad \sum_{s=1}^{\infty} \{ x_m^{(s)} (q_m^{(s)})^n + y_m^{(s)} (-\bar{q}_m^{(s)})^n \} + \{ a_m p^n + b_m (-\bar{p})^n \} = 0.$$

Brechen wir die Potenzreihe von  $J_m(z)$  mit dem  $M^{\text{ten}}$  Glied ab und setzen  $x_m^{(s)} = y_m^{(s)} = 0$  für  $M < s$ , so bekommen wir für jedes  $m$  folgende  $2M$  lineare Gleichungen mit  $2M$  Variablen, die mit Hilfe der Determinaten lösbar sind:

$$\sum_{s=1}^M \{ x_m^{(s)} (q_m^{(s)})^n + y_m^{(s)} (-\bar{q}_m^{(s)})^n \} + \{ a_m p^n + b_m (-\bar{p})^n \} = 0,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, 2M-1.$$

Wenn wir annehmen, daß dieses Verfahren immer noch als richtig gelte, wenn auch  $M$  unendlich groß wird, bekommen wir für  $x_m^{(s)}$  und  $y_m^{(s)}$  folgende Ausdrücke:

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_m^{(s)} = -a_m \frac{\overline{q_m^{(s)}} + p}{q_m^{(s)} + \overline{q_m^{(s)}}} \prod_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq s}}^{\infty} \frac{(q_m^{(\sigma)} - p)(\overline{q_m^{(\sigma)}} + p)}{(q_m^{(\sigma)} - q_m^{(s)})(\overline{q_m^{(\sigma)}} + \overline{q_m^{(s)}})}, \\ \quad - b_m \frac{\overline{q_m^{(s)}} - \bar{p}}{q_m^{(s)} + \overline{q_m^{(s)}}} \prod_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq s}}^{\infty} \frac{(q_m^{(\sigma)} + \bar{p})(\overline{q_m^{(\sigma)}} - \bar{p})}{(q_m^{(\sigma)} - q_m^{(s)})(\overline{q_m^{(\sigma)}} + \overline{q_m^{(s)}})}, \\ y_m^{(s)} = -a_m \frac{q_m^{(s)} - p}{q_m^{(s)} + \overline{q_m^{(s)}}} \prod_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq s}}^{\infty} \frac{(q_m^{(\sigma)} - p)(\overline{q_m^{(\sigma)}} + p)}{(q_m^{(\sigma)} + \overline{q_m^{(s)}})(\overline{q_m^{(\sigma)}} - \overline{q_m^{(s)}})}, \\ \quad - b_m \frac{q_m^{(s)} + \bar{p}}{q_m^{(s)} + \overline{q_m^{(s)}}} \prod_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq s}}^{\infty} \frac{(q_m^{(\sigma)} + \bar{p})(\overline{q_m^{(\sigma)}} - \bar{p})}{(q_m^{(\sigma)} + \overline{q_m^{(s)}})(\overline{q_m^{(\sigma)}} - \overline{q_m^{(s)}})}. \end{array} \right.$$

Einfachheitshalber schreiben wir symbolisch:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \prod(q_m^{(s)}, p) = \frac{\overline{q_m^{(s)}} + p}{q_m^{(s)} + \overline{q_m^{(s)}}} \prod_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq s}}^{\infty} \frac{(q_m^{(\sigma)} - p)(\overline{q_m^{(\sigma)}} + p)}{(q_m^{(\sigma)} - q_m^{(s)})(\overline{q_m^{(\sigma)}} + \overline{q_m^{(s)}})}, \\ \prod(q_m^{(s)}, -\bar{p}) = \frac{\overline{q_m^{(s)}} - \bar{p}}{q_m^{(s)} + \overline{q_m^{(s)}}} \prod_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq s}}^{\infty} \frac{(q_m^{(\sigma)} + \bar{p})(\overline{q_m^{(\sigma)}} - \bar{p})}{(q_m^{(\sigma)} - q_m^{(s)})(\overline{q_m^{(\sigma)}} + \overline{q_m^{(s)}})}. \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir das unendliche Produkt, das dem Produkt  $\Pi$  konjugiert komplex ist, durch  $\bar{\Pi}$ , dann sind:

$$\bar{\Pi}(q_m^{(s)}, p) = \Pi(-\overline{q_m^{(s)}}, -\bar{p}),$$

$$\bar{\Pi}(q_m^{(s)}, -\bar{p}) = \Pi(-\overline{q_m^{(s)}} p).$$

Diese vier unendlichen Produkte sind alle absolut konvergent. Denn z. B. das erste unendliche Produkt  $\Pi(q_m^{(s)}, p)$  ist

$$\begin{aligned}
 & \Pi(q_m^{(\sigma)}, p) \\
 &= \frac{\alpha_m^{(\sigma)} + \alpha - i(\beta_m^{(\sigma)} - \beta)}{\alpha_m^{(\sigma)} + \alpha_m^{(\sigma)} + i(\beta_m^{(\sigma)} - \beta_m^{(\sigma)})} \prod_{\sigma=1}^{\infty} \frac{\{\alpha_m^{(\sigma)} - \alpha + i(\beta_m^{(\sigma)} - \beta)\} \{\alpha_m^{(\sigma)} + \alpha - i(\beta_m^{(\sigma)} - \beta)\}}{\{\alpha_m^{(\sigma)} - \alpha_m^{(\sigma)} + i(\beta_m^{(\sigma)} - \beta_m^{(\sigma)})\} \{\alpha_m^{(\sigma)} + \alpha_m^{(\sigma)} - i(\beta_m^{(\sigma)} - \beta_m^{(\sigma)})\}} \\
 &= \frac{\alpha_m^{(\sigma)} + \alpha - i(\beta_m^{(\sigma)} - \beta)}{2\alpha_m^{(\sigma)}} \prod_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{\alpha_m^{(\sigma)}}{\alpha_m^{(\sigma)}}\right)^2}{1 - \left(\frac{\alpha_m^{(\sigma)}}{\alpha_m^{(\sigma)}}\right)^2} \cdot \prod \left\{ 1 - \frac{(\beta_m^{(\sigma)} - \beta)^2}{\alpha_m^{(\sigma)2} - \alpha^2} + i \frac{2\alpha(\beta_m^{(\sigma)} - \beta)}{\alpha_m^{(\sigma)2} - \alpha^2} \right\} \\
 &= \frac{\alpha_m^{(\sigma)} + \alpha - i(\beta_m^{(\sigma)} - \beta)}{2\alpha_m^{(\sigma)}} \prod_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{\alpha_m^{(\sigma)}}{\alpha_m^{(\sigma)}}\right)^2}{1 - \left(\frac{\alpha_m^{(\sigma)}}{\alpha_m^{(\sigma)}}\right)^2} \cdot \prod \left\{ 1 - \frac{(\beta_m^{(\sigma)} - \beta_m^{(\sigma)})^2}{\alpha_m^{(\sigma)2} - \alpha_m^{(\sigma)2}} + i \frac{2\alpha_m^{(\sigma)}(\beta_m^{(\sigma)} - \beta_m^{(\sigma)})}{\alpha_m^{(\sigma)2} - \alpha_m^{(\sigma)2}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Da  $\alpha_m^{(\sigma)}$  für großes  $\sigma$  nach (10)  $\sigma$  proportional wächst, wächst  $\alpha_m^{(\sigma)2} \sigma^2$  proportional, und das erste unendliche Produkt im obigen Ausdruck ist daher absolut konvergent. Ferner da  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \beta_m^{(\sigma)}$  endlich ist und da  $\alpha_m^{(\sigma)2} - \alpha^2$  und  $\alpha_m^{(\sigma)2} - \alpha_m^{(\sigma)2}$  für großes  $\sigma$  auch  $\sigma^2$  proportional wachsen, sind die unendlichen Produkte im Zähler und Nenner auch absolut konvergent. Ebenso können wir es für die anderen drei unendlichen Produkte beweisen.

Diese unendlichen Produkte  $\Pi(q_m^{(\sigma)}, p)$  usw. hängen mit der Funktion  $F_m(z)$  in (7) folgendermaßen zusammen, wenn in dieser  $z$  durch  $p \varrho$  beziehungsweise  $-\bar{p} \varrho$  ersetzt wird.

Setzen wir jetzt

$$F_m(z) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}^m}{i\pi} e^{\Phi_m(z)} \frac{1}{z} \prod_{\sigma=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{q_m^{(\sigma)}}\right) \left(1 + \frac{z}{q_m^{(\sigma)}}\right),$$

dann erhält  $\Phi_m(z)$  folgenden Ausdruck:

$$\Phi_m(z) = -2iz \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{\sin \vartheta_m^{(\sigma)}}{u_m^{(\sigma)}} + z^2 \left\{ 2 \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{\cos 2\vartheta_m^{(\sigma)}}{u_m^{(\sigma)2}} - (\varepsilon - 1) \zeta_2 \right\} + \dots,$$

in dem für  $m = 0$ ,  $\zeta_2 = -\log i\gamma z/2$  und für sonstige Fälle  $\zeta_2 = 1/2m$  ist.

Daher werden:

$$\begin{aligned}\prod(q_m^{(s)}, p) &= \frac{p}{q_m^{(s)} - p} e^{\Phi_m(q_m^{(s)}) - \Phi_m(p)} \left[ \frac{F_m(p, q)}{\frac{\partial F_m(p, q)}{\partial (p, q)}} \right]_{p=q_m^{(s)}}, \\ \prod(q_m^{(s)}, -\bar{p}) &= \frac{-\bar{p}}{q_m^{(s)} + \bar{p}} e^{\Phi_m(q_m^{(s)}) - \Phi_m(-\bar{p})} \left[ \frac{F_m(-\bar{p}, q)}{\frac{\partial F_m(p, q)}{\partial (p, q)}} \right]_{p=q_m^{(s)}}, \\ \prod(-\bar{q}_m^{(s)}, p) &= \frac{p}{-\bar{q}_m^{(s)} - p} e^{\Phi_m(-\bar{q}_m^{(s)}) - \Phi_m(p)} \left[ \frac{F_m(p, q)}{\frac{\partial F_m(p, q)}{\partial (p, q)}} \right]_{p=\bar{q}_m^{(s)}}, \\ \prod(-\bar{q}_m^{(s)}, -\bar{p}) &= \frac{-\bar{p}}{-\bar{q}_m^{(s)} + \bar{p}} e^{\Phi_m(-\bar{q}_m^{(s)}) - \Phi_m(-\bar{p})} \left[ \frac{F_m(-\bar{p}, q)}{\frac{\partial F_m(p, q)}{\partial (p, q)}} \right]_{p=\bar{q}_m^{(s)}}.\end{aligned}$$

Wenn  $p = q_m^{(s)}$  ist, dann

$$\prod(q_m^{(s)}, q_m^{(s)}) = 1, \quad \prod(q_m^{(s)}, -\bar{q}_m^{(s)}) = 0.$$

Wenn  $p$  einem anderen  $q_m$ , etwa  $q_m^{(s')}$  gleich ist, dann

$$\prod(q_m^{(s)}, q_m^{(s')}) = \prod(q_m^{(s)}, -\bar{q}_m^{(s')}) = 0.$$

Die Gleichungen (35) können wir jetzt folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}x_m^{(s)} &= -a_m \prod(q_m^{(s)}, p) - b_m \prod(q_m^{(s)}, -\bar{p}), \\ y_m^{(s)} &= -a_m \bar{\prod}(q_m^{(s)}, -\bar{p}) - b_m \bar{\prod}(q_m^{(s)}, p).\end{aligned}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}x_m^{(s)} &= -B_m^{(0)} p^m \prod(q_m^{(s)}, p) - \bar{B}_m^{(0)} \bar{p}^m \prod(q_m^{(s)} - \bar{p}) \\ &= D_m^{(s)} q_m^{(s)m}.\end{aligned}$$

Daher:

$$D_m^{(s)} = -q_m^{(s)-m} \{ B_m^{(0)} p^m \prod(q_m^{(s)}, p) + \bar{B}_m^{(0)} \bar{p}^m \prod(q_m^{(s)}, -\bar{p}) \}.$$

Daher aus (30) sowie (31):

$$\begin{aligned}& (D_m^{(s)'} - D_m^{(s)''} e^{i q_m^{(c)} c T}) e^{i q_m^{(s)} c v T}, \\ &= -q_m^{(s)-m} \{ B_m p^m e^{i p c v T} \prod(q_m^{(s)}, p) + \bar{B}_m \bar{p}^m e^{-i \bar{p} c v T} \prod(q_m^{(s)}, -\bar{p}) \}, \\ & (D_m^{(s)'} e^{i q_m^{(s)} e \mu \tau} - D_m^{(s)''} e^{i q_m^{(s)} c \mu \tau}) e^{i q_m^{(s)} c v T}, \\ &= -q_m^{(s)-m} \{ B_m p^m e^{i(p c v T + p c \mu \tau)} \prod(q_m^{(s)}, p) \\ & \quad + \bar{B}_m \bar{p}^m e^{-i(\bar{p} c v T + \bar{p} c \mu \tau)} \prod(q_m^{(s)}, -\bar{p}) \}.\end{aligned}$$

Wenn wir aus diesen zwei Gleichungen  $D_m^{(s)'}$  und  $D_m^{(s)''}$  finden, und dann in sie die Ausdrücke

$$B_m = \frac{(2) 2 i^{m-1}}{\pi p q} \frac{a'}{F_m(p q)}, \quad \bar{B}_m = \frac{(2) 2 (-i)^{m-1}}{\pi \bar{p} \bar{q}} \frac{\bar{a}'}{F_m(-\bar{p} \bar{q})},$$

$$\text{wo} \quad a' = a e^{-i \frac{\pi}{2} - i p c v T}, \quad \bar{a}' = a e^{i \frac{\pi}{2} + i \bar{p} c v T},$$

einsetzen, dann bekommen wir:

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} D_m^{(s)'} &= \frac{(2) 2 i^m a}{\pi} \frac{e^{-i q_m^{(s)} c v T}}{1 - e^{i q_m^{(s)} c T}} \{q_m^{(s)}\}^{-m} \\ &\times \left\{ \frac{p^m \Pi(q_m^{(s)}, p)}{p q F_m(p q)} \left( 1 - e^{i p c \mu \tau - i q_m^{(s)} c \mu \tau + i q_m^{(s)} c T} \right) \right. \\ &\left. + (-1)^m \frac{\bar{p}^m \Pi(q_m^{(s)}, -\bar{p})}{\bar{p} \bar{q} F_m(-\bar{p} \bar{q})} \left( 1 - e^{-i \bar{p} c \mu \tau - i q_m^{(s)} c \mu \tau + i q_m^{(s)} c T} \right) \right\} \\ &v T < t < v T + \mu \tau, \end{aligned} \right.$$

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} D_m^{(s)''} &= \frac{(2) 2 i^m a}{\pi} \frac{e^{-i q_m^{(s)} c v T}}{1 - e^{i q_m^{(s)} c T}} \{q_m^{(s)}\}^{-m} \\ &\times \left\{ \frac{p^m \Pi(q_m^{(s)}, p)}{p q F_m(p q)} \left( 1 - e^{i p c \mu \tau - i q_m^{(s)} c \mu \tau} \right) \right. \\ &\left. + (-1)^m \frac{\bar{p}^m \Pi(q_m^{(s)}, -\bar{p})}{\bar{p} \bar{q} F_m(-\bar{p} \bar{q})} \left( 1 - e^{-i \bar{p} c \mu \tau - i q_m^{(s)} c \mu \tau} \right) \right\} \\ &v T + \mu \tau < t < (v + 1) T. \end{aligned} \right.$$

Daher durch (13) und (25) für kleines  $m$ :

$$(39) \quad C_m^{(s)'} = \frac{J_m(\sqrt{s} q_m^{(s)})}{H_m^{(2)}(q_m^{(s)} q)} D_m^{(s)'}, \quad v T < t - \frac{r}{c} < v T + \mu \tau,$$

$$(40) \quad C_m^{(s)''} = \frac{J_m(\sqrt{s} q_m^{(s)})}{H_m^{(2)}(q_m^{(s)} q)} D_m^{(s)''}. \quad v T + \mu \tau < t - \frac{r}{c} < (v + 1) T.$$

Im Ausdruck von  $D_m^{(s)'}$  (37) und von  $D_m^{(s)''}$  (38) tritt häufig ein Glied  $e^{i q_m^{(s)} c T}$  auf. Dies wird verschwinden ohne weiteres, wenn  $\Im m q_m^{(s)} c T$ , d. h.  $\beta_m^{(s)} c T / q$  groß genug ist, wie bei  $\beta_0^{(1)}$ .

Ändert sich  $q$  um  $d q$ , dann erleidet  $q_m^{(s)} c T$  eine Änderung

$$- \frac{\alpha_m^{(s)} + i \beta_m^{(s)}}{q^2} c T d q.$$

Seien  $T = 8 \tau$ ,  $\lambda = 24 \text{ cm}$ ,  $\alpha_m^{(s)} = \alpha_1^{(1)} = 0,26$ ,  $\varrho = 1 \text{ cm}$  und  $d\varrho = 0,02 \text{ cm}$ , dann ist die Änderung des reellen Teils

$$-\frac{\alpha_m^{(s)}}{\varrho^2} c T d\varrho = 66^\circ,$$

dagegen ist die Änderung des imaginären Teils sehr klein, wenn  $\beta_m^{(s)}$  klein ist.

Daher oszilliert der Wert von  $e^{i q_m^{(s)} c T}$  durch eine kleine Änderung von  $\varrho$  so oft und so rasch, daß wir statt des sehr veränderlichen Wertes den Mittelwert nehmen können. Der Mittelwert ist

$$\frac{i}{2\pi} e^{i q_m^{(s)} c T} \left\{ 1 - e^{-2\pi \frac{k_m^{(s)}}{n_m^{(s)}}} \right\},$$

also ist er sehr klein, wenn  $k_m^{(s)}$  sehr klein ist.

Daher können wir  $e^{i q_m^{(s)} c T}$  in  $D_m^{(s)'}$  und  $D_m^{(s)''}$  durch Null ersetzen.

Die physikalische Bedeutung dieser Vernachlässigung ist folgende.

Der Anfangszustand von  $\mathfrak{E}_i$  für  $t = \nu T$  ist so rasch mit kleiner Änderung des Radius  $\varrho$  um seinen Mittelwert veränderlich, daß wir statt der richtigen Werte den Mittelwert betrachten können. Dasselbe Resultat können wir daher bekommen, wenn wir statt (28)

$$\mathfrak{E}_i (B_m, D_m^{(s)'})_{t=\nu T} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_i (B_m, D_m^{(s)'})_{t=\nu T}}{\partial t} = 0$$

benutzen.

Daher werden:

$$(41) \left\{ \begin{aligned} C_m^{(s)'} &= e^{-i q_m^{(s)} c \nu T} \frac{(2) 2 i^m a}{\pi} \frac{J_m(\sqrt{s} q_m^{(s)} \varrho)}{H_m^{(2)}(q_m^{(s)} \varrho)} \{q_m^{(s)}\}^{-m} \\ &\times \left\{ \frac{p^m \Pi(q_m^{(s)}, p)}{p \varrho F_m(p \varrho)} + (-1)^m \frac{p^m \Pi(q_m^{(s)}, -p)}{p \varrho F_m(-p \varrho)} \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(42) \left\{ \begin{aligned} C_m^{(s)'} &= e^{-i q_m^{(s)} c \nu T} \frac{(2) 2^m a}{\pi} \frac{J_m(\sqrt{s} q_m^{(s)} \varrho)}{H_m^{(2)}(q_m^{(s)} \varrho)} \{q_m^{(s)}\}^{-m} \\ &\times \left\{ \frac{p^m \Pi(q_m^{(s)}, p)}{p \varrho F_m(p \varrho)} \left(1 - e^{i c \mu \tau (p - q_m^{(s)})}\right) \right. \\ &\left. + (-1)^m \frac{\bar{p}^m \Pi(q_m^{(s)}, \bar{p})}{\bar{p} \varrho F_m(-\bar{p} \varrho)} \left(1 - e^{-i c \mu \tau (\bar{p} + q_m^{(s)})}\right) \right\} \end{aligned} \right.$$

# § 6. Gesamtschwingung des Außenraumes.

Die Gesamtschwingung des Außenraumes  $\mathfrak{E}_a$  ist nach (27a)

$$\mathfrak{E}_a = a' e^{i p (r \cos \varphi + c t)} + \frac{e^{i p (c t - r)}}{\sqrt{p r}} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i \frac{2m+1}{4} \pi} A_m \cos m \varphi \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{i q_m^{(s)} (c t - r)}}{\sqrt{q_m^{(s)} r}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i \frac{2m+1}{4} \pi} C_m^{(s)} \cos m \varphi,$$

wo die Konstanten  $a'$ ,  $A_m$  und  $C_m^{(s)}$  durch (17), (25), (41) und (42) bestimmt sind.

Definieren wir jetzt reelle Konstanten  $R_m$ ,  $R_m^{(s)}$ ,  $\psi_m$  und  $\psi_m^{(s)}$  folgendermaßen:

$$(43) \quad a R_m e^{i \psi_m} = \sqrt{\frac{2}{\pi p}} e^{i \frac{2m+1}{4} \pi + i p c \nu T} A_m,$$

$$(44) \quad a R_m^{(s)} e^{i \psi_m^{(s)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi q_m^{(s)}}} e^{i \frac{2m+1}{4} \pi + i q_m^{(s)} c \nu T} C_m^{(s)}.$$

Setzen wir (43) und (44) in (27a) ein und trennen den reellen Teil, dann bekommen wir:

$$(45) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_a &= a_1 e^{-k(r \cos \varphi + c t - \nu T)} \cos n \left( r \cos \varphi + c t - \nu T - \frac{\pi}{2} \right) \\ &+ \frac{a}{\sqrt{r}} e^{-k(c t - \nu T - r)} \sum_{m=0}^{\infty} R_m \cos \{n(c t - \nu T - r) + \psi_m\} \cos m \varphi \\ &+ \frac{a}{\sqrt{r}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} R_m^{(s)} e^{-k_m^{(s)}(c t - \nu T - r)} \cos \{n_m^{(s)}(c t - \nu T - r) \\ &+ \psi_m^{(s)}\} \cos m \varphi, \end{aligned} \right.$$

$$\text{wo} \quad a_1 = a \text{ für } \nu T < t + \frac{r \cos \varphi}{c} < \nu T + \mu \tau,$$

$$= 0 \text{ für } \nu T + \mu \tau < t + \frac{r \cos \varphi}{c} < (\nu + 1) T.$$

$$\begin{aligned}
 R_m e^{i\psi_m} &= (2)(-1)^{m+1} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \frac{V \varepsilon J_m(p \varrho) J_{m+1}(V \varepsilon p \varrho)}{F_m(p \varrho)} \\
 &\quad \text{für } vT < t - \frac{r}{c} < vT + \mu\tau, \\
 &= 0 \quad \text{für } vT + \mu\tau < t - \frac{r}{c} < (v+1)T, \\
 R_m^{(s)} e^{i\psi_m^{(s)}} &= \frac{(2)2(-1)^m e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi q_m^{(s)}}} \frac{J_m(V \varepsilon q_m^{(s)} \varrho)}{H_m^{(2)}(q_m^{(s)} \varrho)} q_m^{(s)-m} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{p^m \Pi(q_m^{(s)}, p)}{p \varrho F_m(p \varrho)} + (-1)^m \frac{p^m \Pi(q_m^{(s)}, -p)}{p \varrho F_m(-p \varrho)} \right\}, \\
 &\quad \text{für } vT < t - \frac{r}{c} < vT + \mu\tau, \\
 R_m^{(s)} e^{i\psi_m^{(s)}} &= \frac{(2)2(-1)^m e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi q_m^{(s)}}} \frac{J_m(V \varepsilon q_m^{(s)} \varrho)}{H_m^{(2)}(q_m^{(s)} \varrho)} q_m^{(s)-m} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{p^m \Pi(q_m^{(s)}, p)}{p \varrho F_m(p \varrho)} (1 - e^{ic\mu\tau(p - q_m^{(s)})}) \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^m \frac{p^m \Pi(q_m^{(s)}, -p)}{p \varrho F_m(-p \varrho)} (1 - e^{-ic\mu\tau(\bar{p} + q_m^{(s)})}) \right\} \\
 &\quad \text{für } vT + \mu\tau < t - \frac{r}{c} < (v+1)T.
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

Die Bedingungen der Gültigkeit von  $R_m e^{i\psi_m}$  und  $R_m^{(s)} e^{i\psi_m^{(s)}}$  sind nur für kleines  $m$  richtig.

### § 7. Resonanz.

Der Ausdruck (45) der Gesamtschwingung verliert scheinbar seinen Sinn, wenn die einfallende Schwingung mit einer der Eigenschwingung in Schwingungszahl und Dämpfung übereinstimmt. Denn, seien  $k = k_{m'}^{(s')}$  und  $n = n_{m'}^{(s')}$ , dann werden die Koeffizienten:

$$R_{m'} e^{i\psi_{m'}} = \infty, \quad R_{m'}^{(s')} e^{i\psi_{m'}^{(s')}} = \infty + \frac{0}{0},$$

$$vT < t - \frac{r}{c} < vT + \mu\tau,$$

und

$$R_{m'} e^{i\psi_{m'}} = 0, \quad R_{m'}^{(s')} e^{i\psi_{m'}^{(s')}} = \frac{0}{0} + \frac{0}{0},$$

$$vT + \mu\tau < t - \frac{r}{c} < (v+1)T.$$



Im ersten Fall formen wir die Summe der Schwingungen, deren Amplituden unendlich groß werden, folgendermaßen um:

$$\frac{\cos m' \varphi}{\sqrt{r}} \left\{ R_{m'} e^{i \psi_{m'}} \frac{e^{i p (c t - r)}}{\sqrt{p}} + R_{m'}^{(s')} e^{i \psi_{m'}^{(s')}} \frac{e^{i q_{m'}^{(s')} (c t - r)}}{\sqrt{q_{m'}^{(s')}}} \right\} \\ = \frac{\cos m' \varphi}{\sqrt{r}} \left\{ \left[ R_{m'} e^{i \psi_{m'}} \frac{e^{i p (c t - r)}}{\sqrt{p}} + R_{m'1}^{(s')} e^{i \psi_{m'1}^{(s')}} \frac{e^{i q_{m'1}^{(s')} (c t - r)}}{\sqrt{q_{m'1}^{(s')}}} \right] \right. \\ \left. + R_{m'2}^{(s')} e^{i \psi_{m'2}^{(s')}} \frac{e^{i q_{m'2}^{(s')} (c t - r)}}{\sqrt{q_{m'2}^{(s')}}} \right\},$$

wo

$$R_{m1}^{(s)} e^{i \psi_{m1}^{(s)}} \\ = \frac{(2) 2 (-1)^m e^{i \frac{\pi}{4}}}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi q_m^{(s)}}} \frac{J_m(\sqrt{s} q_m^{(s)} \varphi)}{H_m^{(2)}(q_m^{(s)} \varphi)} \{q_m^{(s)}\}^{-m} \frac{p^m \Pi(q_m^{(s)}, p)}{p \varphi F_m(p \varphi)},$$

$$R_{m2}^{(s)} e^{i \psi_{m2}^{(s)}} \\ = \frac{(2) 2 e^{i \frac{\pi}{4}}}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi q_m^{(s)}}} \frac{J_m(\sqrt{s} q_m^{(s)} \varphi)}{H_m^{(2)}(q_m^{(s)} \varphi)} \{q_m^{(s)}\}^{-m} \frac{\bar{p}^m \Pi(q_m^{(s)}, -\bar{p})}{\bar{p} \varphi F_m(-\bar{p} \varphi)}$$

gesetzt sind.

Dann nimmt der obige Ausdruck eine unbestimmte Form  $0/0 + 0/0$  an, wenn  $p = q_m^{(s)}$  wird.

Daher können wir nach der Theorie der Differentialrechnung den richtigen Wert bestimmen.

Wir bekommen dann:

$$(47) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_a &= a, e^{-k_{m'}^{(s')} (r \cos \varphi + c t - v T)} \cos \{n_{m'}^{(s')} (r \cos \varphi + c t - v T) - \frac{\pi}{2}\} \\ &+ \frac{a}{\sqrt{r}} e^{-k_{m'}^{(s')} (c t - v T - r)} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq m'}}^{\infty} R_m \cos \{n_{m'}^{(s')} (c t - v T - r) \\ &+ \psi_m\} \cos m \varphi \\ &+ \frac{a}{\sqrt{r}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{s=1 \\ (m \neq m' \text{ gleichzeitig})}}^{\infty} R_m^{(s)} e^{-k_m^{(s)} (c t - v T - r)} \cos \{n_m^{(s)} (c t - v T - r) \\ &+ \psi_m^{(s)}\} \cos m \varphi \\ &+ \frac{a}{\sqrt{r}} R_{m'}^{(s')} e^{-k_{m'}^{(s')} (c t - v T - r)} \cos \{n_{m'}^{(s')} (c t - v T - r) \\ &+ \psi_{m'}^{(s')} \} \cos m' \varphi, \end{aligned} \right.$$

wo

$$\begin{aligned}
 (48) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & R_{m'}^{(s')} e^{i\psi_{m'}^{(s')}} \\
 &= \frac{(2)2(-1)^{m'} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\pi \varrho (\varepsilon - 1) H_{m'}^{(2)}(q_{m'}^{(s')}) \varrho} \sqrt{\frac{2}{\pi q_{m'}^{(s')}}} \left\{ \frac{1}{\varrho q_{m'}^{(s')} H_{m'}^{(2)}(q_{m'}^{(s')}) \varrho} \right\} \{c(t - vT) \\
 &- r + \frac{2m' - 1}{2q_{m'}^{(s')}} i - \frac{\varrho(\varepsilon - 1)}{2} \pi \varrho q_{m'}^{(s')} J_{m'}^{(s')}(q_{m'}^{(s')}) H_{m'}^{(2)}(q_{m'}^{(s')}) \varrho \\
 &+ i \left[ \frac{\partial}{\partial p} \Pi(q_{m'}^{(s')}, p) \right]_{p=q_{m'}^{(s')}} \} \\
 &+ \frac{(-1)^{m'} + 1}{\varrho q_{m'}^{(s')} H_{m'}^{(1)}(q_{m'}^{(s')}) \varrho} \left\{ \frac{q_{m'}^{(s')}}{q_{m'}^{(s')}} \right\}^{m'} \left[ \frac{\partial \Pi(q_{m'}^{(s')} - p)}{\partial p} \right]_{p=q_{m'}^{(s')}} \frac{J_{m'}(\sqrt{\varepsilon} q_{m'}^{(s')}) \varrho}{J_{m'}(\sqrt{\varepsilon} q_{m'}^{(s')}) \varrho} \} \\
 &\quad \text{für} \quad vT < t - \frac{r}{c} < vT + \mu\tau, \\
 &R_{m'}^{(s')} e^{i\psi_{m'}^{(s')}} = \frac{(2)2(-1)^{m'} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\pi \varrho (\varepsilon - 1) H_{m'}^{(2)}(q_{m'}^{(s')}) \varrho} \sqrt{\frac{2}{\pi q_{m'}^{(s')}}} \left\{ \frac{c\mu\tau}{\varrho q_{m'}^{(s')} H_{m'}^{(s')}(q_{m'}^{(s')}) \varrho} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(-1)^{m'} + 1}{\varrho q_{m'}^{(s')} H_{m'}^{(1)}(q_{m'}^{(s')}) \varrho} \left\{ \frac{q_{m'}^{(s')}}{q_{m'}^{(s')}} \right\}^{m'} \left[ \frac{\partial \Pi(q_{m'}^{(s')} - p)}{\partial p} \right]_{p=q_{m'}^{(s')}} \frac{J_{m'}(\sqrt{\varepsilon} q_{m'}^{(s')}) \varrho}{J_{m'}(\sqrt{\varepsilon} q_{m'}^{(s')}) \varrho} \right\} \\
 &\quad \text{für} \quad vT + \mu\tau < t - \frac{r}{c} < (v+1)T.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$R_{m'}^{(s')}$  und  $\psi_{m'}^{(s')}$  sind daher für  $vT < t - r/c < vT + \mu\tau$  keine Konstanten.

### § 8. Intensität der Schwingung auf der Linie $\varphi = \pi$ .

Wir wollen jetzt die Schwingung auf der Linie  $\varphi = \pi$  betrachten. In diesem Fall wird  $r \cos \varphi = -r$ , und alle Koeffizienten werden gleichzeitig unstetig, nämlich für  $t = vT$  und  $vT + \mu\tau$ .

Führen wir jetzt eine neue Variable

$$(49) \quad z = n \{c(t - vT) - r\}$$

ein, und setzen

$$(50) \quad \kappa = \frac{k}{n}.$$

Nehmen wir dann aus (45) nur solche Glieder, bei denen  $m$  gleich oder kleiner als eine ganze feste Zahl  $N$  ist, die gegen  $r$  sehr klein ist. Durch diese Vernachlässigung wird das Re-

sultat wenig beeinflußt, da, wenn  $\varphi$  klein ist, die Amplituden aller Schwingungen mit wachsendem  $m$  sehr rasch abnehmen.

Wir bekommen daher jetzt:

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_a &= e^{-\kappa z} \left\{ C \cos z + S \sin z \right\} \\ &+ \sum_{m=0}^N \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\kappa \frac{\beta_m^{(s)}}{\beta} z} \left\{ C_m^{(s)} \cos \frac{\alpha_m^{(s)}}{\alpha} z + S_m^{(s)} \sin \frac{\alpha_m^{(s)}}{\alpha} z \right\}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} C &= \frac{a}{\sqrt{r}} \sum_{m=0}^N (-1)^m \cdot R_m \cos \psi_m, \\ S &= a - \frac{a}{\sqrt{r}} \sum_{m=0}^N (-1)^m R_m \sin \psi_m, \\ C_m^{(s)} &= \frac{a}{\sqrt{r}} R_m^{(s)'} \cos \psi_m^{(s)'}, \\ S_m^{(s)} &= -\frac{a}{\sqrt{r}} R_m^{(s)'} \sin \psi_m^{(s)'}, \\ C &= S = 0, \\ C_m^{(s)} &= \frac{a}{\sqrt{r}} R_m^{(s)''} \cos \psi_m^{(s)''}, \\ S_m^{(s)} &= -\frac{a}{\sqrt{r}} R_m^{(s)''} \sin \psi_m^{(s)''}, \end{aligned} \right. \quad \left. \begin{aligned} &\text{für } 0 < \frac{\kappa}{nc} < \mu \tau, \\ &\text{für } \mu \tau < \frac{\kappa}{nc} < T, \end{aligned} \right.$$

in denen  $R_m$  den von Null verschiedenen Wert von  $R_m$ ,  $R_m^{(s)'}$ ,  $\psi_m^{(s)'}$  den ersten Wert,  $R_m^{(s)''}$ ,  $\psi_m^{(s)''}$  den zweiten Wert von  $R_m^{(s)}$  und  $\psi_m^{(s)}$  in (46) bedeuten.<sup>1)</sup>

Die Intensität, die experimentell gemessen werden kann, ist nicht  $\mathfrak{E}_a^2$  selbst, sondern die Mittelintensität, die durch eine Integration von  $\mathfrak{E}_a^2$  nach  $z$  von  $z = 0$  bis  $z = ncT$  erhalten wird. Dabei ist das Integral in zwei Teile zu teilen, da die Amplituden der Schwingungen in einer Periode  $T$  nur einmal und auf einmal unstetig werden, was aber nur auf der Linie  $\varphi = \pi$  vorkommen kann.

1) Man beachte, daß die hier auftretenden Größen  $C_m^{(s)}$  nicht mit denen, die in vorgehenden Paragraphen auftraten, zu verwechseln sind.

Die Mittelintensität  $\overline{\mathcal{E}_a^2}$  ist also

$$(53) \quad \left\{ \overline{\mathcal{E}_a^2} = \frac{1}{ncT} \left\{ \int_0^{nc\mu r} \overline{\mathcal{E}_a^2} dz + \int_{nc\mu r}^{ncT} \overline{\mathcal{E}_a^2} dz \right\} \right\}.$$

Wir berechnen durch diese Formeln (51), (52) und (53) nochmals die Kurve, deren Abszissen die Radien des Zylinders und deren Ordinaten die relativen Intensitäten der Feldstärke in einem festen Punkt auf  $\varphi = \pi$  sind, und die schon von Cl. Schaefer und F. Grossmann sowohl experimentell als auch theoretisch bestimmt wurde.

In der Figur (p. 32) sind fünf Kurven gezogen.

1. Die Kurve (a) wurde von Cl. Schaefer und F. Grossmann experimentell bestimmt. Die nötigen bekannten Größen waren folgende:

- Das Medium des Innenraums: Wasser .  $\varepsilon$  = 81  
 Die Wellenlänge der einfallenden Wellen  $\lambda$  = 24 cm  
 (Die Dämpfung der einfallenden Wellen unbekannt.)  
 Die Entfernung des Meßapparates von der Zylinderachse . . . . .  $r$  = 10 cm  
 Der größte Radius des Zylinders . . .  $\varrho_{\max}$  = 1,5 cm  
 Die Mittelintensität der Feldstärke bei  $\varphi = 0$ , d. h. ohne Zylinder . . . .  $\overline{\mathcal{E}_a^2} = 100\%$

2. Die Kurve *b* wurde von Cl. Schaefer unter der Voraussetzung berechnet, daß die einfallende Schwingung vollkommen ungedämpft wäre. Da die Eigenschwingungen mit der Zeit alle abklingen, wurden im stationären Zustande nur die erzwungenen Schwingungen betrachtet und zwar nur für  $m = 0, 1$  und  $2$ , da die Amplituden der anderen Schwingungen im Bereich  $0 < \varphi < 1,5$  verschwindend klein sind. Die nötigen Größen sind dieselben wie bei der Kurve *a*, nur  $k = 0$  in diesem Fall.

3. Die Kurven *c*, *d* und *e* wurden aus unsern Formeln berechnet.

Die folgenden Größen sind in drei Fällen gemeinsam:

$$\lambda = 24, \quad r = 10, \quad \varepsilon = 81, \quad \varrho_{\max} = 1,3 \quad \text{und} \quad (\overline{\mathcal{E}_a^2})_{\varphi=0} = 100\%.$$

Die ganze Periode eines einfallenden Wellenzuges  $T$  ist angenommen

$$T = 8\tau = \frac{8\lambda}{c},$$

die in Rechnung aufgenommenen Eigenschwingungen sind

$$\begin{cases} m = 0 \\ s = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} m = 1 \\ s = 1 \end{cases},$$

die in Rechnung aufgenommenen erzwungenen Schwingungen

$$m = 0 \quad \text{und} \quad m = 1.$$

Die Werte der Radian, bei denen die Resonanz vorkommen kann, liegen für die anderen Eigenschwingungen alle außer unserem Gebiet, z. B.  $\varrho_2^{(1)} = 1,62$ ,  $\varrho_0^{(2)} = 1,67$ ,  $\varrho_3^{(1)} = 2,17$ ,  $\varrho_1^{(2)} = 2,32$  usw., und da die Amplituden der Eigenschwingungen mit Ausnahme in der Nähe von  $\varrho = \varrho_m^{(s)}$  sehr klein sind, können wir uns nur auf die ersten zwei beschränken.

Die Dämpfung  $k$  und die Anzahl der Schwingungen in einem Wellenzuge  $\mu$  sind in  $c$ ,  $d$  und  $e$  verschieden und folgende:

$$c: \quad k = 0,0289, \quad e^{-\lambda k} = \frac{1}{2}, \quad \mu = 8, \quad \mu \tau = T,$$

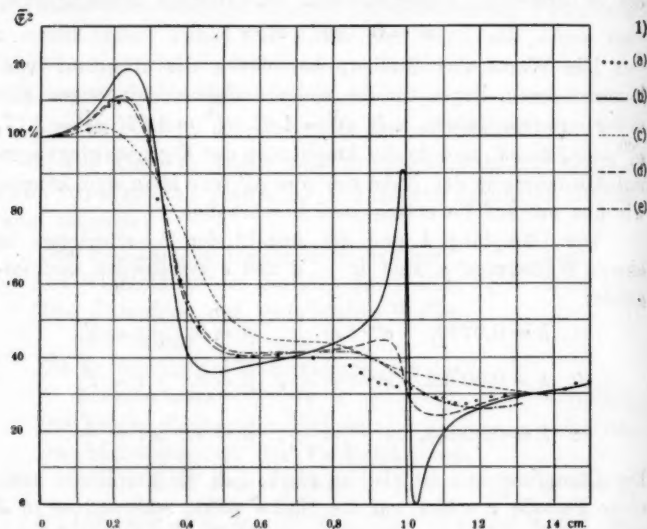
$$d: \quad k = 0,00963, \quad e^{-\lambda k} = \frac{1}{2^{1/2}}, \quad \mu = 8, \quad \mu \tau = T,$$

$$e: \quad k = 0,00963, \quad e^{-\lambda k} = \frac{1}{2^{1/2}}, \quad \mu = 4, \quad \mu \tau = \frac{T}{2}.$$

Die Dämpfung in  $c$  ist also so stark, daß die Amplitude nach einer Periode  $\tau$  schon auf die Hälfte sinkt, während es in  $d$  und  $e$  erst nach drei Perioden  $\tau$  der Fall ist. Daher ist das Resultat in  $c$  fast dasselbe, wenn statt  $\mu = 8$   $\mu = 4$  gesetzt wird, da die Amplitude nach vier Schwingungen schon  $1/16$  wird.

In diesen drei Fällen sind die Amplituden  $C$ ,  $S$ ,  $C_m^{(s)}$  und  $S_m^{(s)}$  mit Ausnahme von der Nähe von  $\varrho_1^{(1)}$  unter der Annahme  $k = 0$  gerechnet. Durch diese Annahme treten nicht kleine Fehler auf, da aber die Amplituden der freien und der erzwungenen Schwingungen gewöhnlich von ähnlicher Größenordnung, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind, heben sich die Fehler gegeneinander meistens auf. Nur in der Nähe von  $\varrho = \varrho_m^{(s)}$  ist der Fehler nicht klein, wenn  $k_m^{(s)}$  gegen  $k$  klein ist, daß  $k$  nicht vernachlässigt werden darf.

Aus der Figur sieht man, daß die Kurven *c*, *d* und *e* der Kurve *a* ähnlicher verlaufen als die Kurve *b*. Besonders haben sie in der Nähe von  $\rho = \rho_1^{(1)} = 1,003$  keine scharfe Biegung, die man in *b* findet. Dies zeigt, daß an dieser Stelle in den oben erwähnten Fällen keine bedeutende Resonanz vorkommt. Jedenfalls wirkt der Unterschied der Dämpfungen  $k$  und  $k_1^{(1)}$  immer in dem Sinne, daß die Kurve besonders an dieser Stelle



verflacht wird, und dies wird durch die Entstehung der Eigenschwingungen noch bedeutend verstärkt. Außerdem scheint die Annahme, daß der Wellenzug eine Pause hat, auch die Kurve zu verflachen.

Wir erreichen also folgenden Schluß:

Die bisher bestehenden Abweichungen zwischen Experiment und Theorie sind nicht auf Mängel weder des Experimentes noch der Theorie an sich zurückzuführen, sondern be-

1) In der Figur sind für (a) nur die einzelnen experimentell bestimmten Punkte eingetragen, damit die Verwechslung der Kurven besser vermieden werden kann.

ruhen darauf, daß das Experiment unter etwas anderen Bedingungen angestellt wurde, als der Theorie entspricht.

In der vorliegenden Arbeit wurde versucht, die Theorie dem Experiment in dieser Hinsicht anzupassen mit dem Ergebnis, daß nunmehr Experiment und Theorie vollkommen übereinstimmen.

Zum Schluß möchte ich noch hinzufügen, daß diese Arbeit auf Veranlassung von Hrn. Professor Cl. Schaefer vorgenommen wurde, so daß ich ihm dafür zu großem Dank verpflichtet bin.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität, im  
Dezember 1913.

(Eingegangen 21. Dezember 1913.)

#### 4. Aufbau der Gastheorie mit Hilfe der Quasiergodenhypothese; von Artur Rosenthal.

Aus dem vor kurzem gelieferten Nachweis der *Nichtexistenz* der ergodischen Gase<sup>1)</sup> folgt die Notwendigkeit, der Gastheorie in anderer Weise, als man es bisher versucht hatte, eine Grundlage zu geben. Es liegt nahe, als Ersatz für die unmögliche Ergodenhypothese zu der von P. und T. Ehrenfest<sup>2)</sup> formulierten *Quasiergodenhypothese* zu greifen, obgleich P. und T. Ehrenfest selbst<sup>3)</sup> die entschiedene Vermutung ausgesprochen haben, daß mit alleiniger Hilfe der Quasiergodenhypothese sich der übliche Aufbau der Gastheorie nicht werde ermöglichen lassen. Der Inhalt dieser (allerdings keineswegs unbedenklichen) Quasierergodenhypothese ist: Jedes Gas soll ein quasiergodisches System sein; d. h. die einzelne ungestörte Bewegung des Systems soll bei unbegrenzter Fortsetzung schließlich *jedem physikalisch möglichen Punkt der* (zur Totalenergie des Gases gehörigen) *Energiefläche beliebig nahe kommen.*<sup>4)</sup>

*Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie in der Tat auf Grund dieser Quasiergodenhypothese der Aufbau der Gastheorie in einfachster Weise gelingt.*

1) Zwei verschiedene Beweise: A. Rosenthal, Ann. d. Phys. 42. 1913) p. 796; M. Plancherel, *ibid.*, p. 1061.

2) P. u. T. Ehrenfest, Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik, Enzyklopädie d. mathem. Wiss. IV. 2 II (32), Nr. 10a, Anm. 90.

3) l. c. u. Anm. 93.

4) Es ist also hierin die in der Ergodenhypothese auftretende Bedingung „durch jeden Punkt der Energiefläche hindurchzugehen“ durch die sehr viel weniger fordernde Bedingung „jedem Punkt der Energiefläche beliebig nahezukommen“ ersetzt. Dies bedeutet tatsächlich einen ganz wesentlichen Unterschied; denn die Ergodenhypothese würde verlangen, daß die gesamte Energiefläche eine einzige Bahnkurve darstellt, während ich l. c. gezeigt habe, daß in Wirklichkeit mehr als abzählbar unendlich viele, voneinander verschiedene Bahnkurven auf jeder Energiefläche existieren müssen.



Bei den hier folgenden Betrachtungen werden allerdings (wie es in dieser Theorie üblich ist) die Gasmoleküle als punktförmig (ideales Gas) oder bei endlicher Ausdehnung als gegenseitig durchdringlich angesehen; ferner wird angenommen, daß Geschwindigkeiten und Impulse sowie ihre zeitlichen Änderungen auch bei etwaigen Zusammenstößen stetig bleiben; überhaupt werden diejenigen Voraussetzungen gemacht, welche für die Anwendbarkeit des Liouvilleschen Satzes notwendig sind.<sup>1)</sup>

Um den gewünschten Nachweis zu liefern, genügt es, mit Hilfe der Quasiergodenhypothese die Formel für das Zeitmittel einer Phasenfunktion (3) und die sogenannte „ergodische“ Flächendichtenverteilung (4) abzuleiten; denn nur zu deren Begründung ist von Boltzmann und Maxwell die unmögliche Ergodenhypothese verwendet worden. Auf jene Formel und Verteilung stützt sich der weitere Aufbau der Gastheorie, bei dem weder von der Ergodenhypothese noch von der Quasiergodenhypothese nochmals explizit Gebrauch gemacht wird.

# § 1.

In üblicher Weise sei das Gas, das aus  $N$  Teilchen von je  $r$  Freiheitsgraden bestehe, durch einen Punkt eines  $2rN$ -dimensionalen Phasenraumes ( $\Gamma$ -Raum) dargestellt; die Koordinaten dieses  $\Gamma$ -Raumes sind dabei die generalisierten Koordinaten  $q_s$  und die generalisierten Impulse  $p_s$  der Teilchen ( $s = 1, 2, \dots, rN$ ). Die zeitliche Veränderung des Gases wird durch eine stetige Kurve im  $\Gamma$ -Raum dargestellt, die bei konstant gehaltener Energie des Gases ( $E = C$ ) [d. h. bei zeitlicher Unveränderlichkeit der äußeren Kräfte] auf einer  $(2rN - 1)$ -dimensionalen stetigen Fläche, der sogenannten Energiefläche  $E_C$  verläuft. Die Fortschreitungs geschwindigkeit ist in jedem Punkt der Bahnkurve nach Größe und Richtung gegeben durch einen Vektor  $v$ , dessen Komponenten  $dq_s/dt$  bzw.  $dp_s/dt$  sind. Diese Vektorfunktion  $v$  ist demnach eine stetige Funktion der Koordinaten  $q_s$  und  $p_s$ . Wegen der Eindeutigkeit des Ablaufs der physikalischen Erscheinungen (Kausalitätsgesetz) sowie wegen der Gültigkeit des Liouvilleschen

1) Dagegen ist mein l. c. gelieferter Beweis der Unmöglichkeit der Ergodenhypothese von all diesen Voraussetzungen unabhängig.

Satzes können durch einen Punkt des  $\Gamma$ -Raumes niemals mehrere voneinander verschiedene Bahnkurven gehen und es muß zu jedem Punkt ein ganz bestimmter Fortschreitungsvektor  $v$  gehören, der von der Zeit völlig unabhängig ist.<sup>1)</sup>

Im  $\Gamma$ -Raum gilt der Liouvillesche Satz: Die zu einer Zeit  $t_1$  ein  $2rN$ -dimensionales Gebiet  $A_1$  erfüllenden Punkte bilden zu irgend einer anderen Zeit  $t_2$  ein anderes  $2rN$ -dimensionales Gebiet  $A_2$  von *gleichem* Rauminhalt. Die zu einer Zeit  $t_1$  in einem  $(2rN-1)$ -dimensionalen Gebiete  $\alpha_1$  einer Energiefläche  $E_C$  gelegenen Punkte bilden daher (weil benachbarte Energieflächen nicht überall gleichen Abstand voneinander zu haben brauchen) zu einer anderen Zeit  $t_2$  ein  $(2rN-1)$ -dimensionales Gebiet  $\alpha_2$  auf der gleichen Energiefläche  $E_C$ , derart daß

$$\int_{\alpha_1} \frac{1}{Q} dS = \int_{\alpha_2} \frac{1}{Q} dS.$$

Dabei bedeutet:

$$Q = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial q_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial E}{\partial q_{rN}}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial p_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial E}{\partial p_{rN}}\right)^2},$$

$dS$  ein  $(2rN-1)$ -dimensionales Element der Energiefläche  $E_C$ .

Zwei  $(2rN-1)$ -dimensionale Gebiete  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  auf  $E_C$ , für welche

$$\int_{\alpha_1} \frac{1}{Q} dS = \int_{\alpha_2} \frac{1}{Q} dS$$

ist, nennen wir zur Abkürzung *isometrisch*; zwei derartige Gebiete, die außerdem noch bei der zeitlichen Strömung auseinander hervorgehen, mögen *äquivalent* heißen.

Es soll ferner unter einer *Strömungsröhre*  $\sigma$  ein  $(2rN-1)$ -dimensionales zylinderartiges Gebiet auf  $E_C$  verstanden werden, dessen Mantelfläche von einer Schar von Strömungslinien gebildet wird und dessen Basis und Deckfläche äquivalente  $(2rN-2)$ -dimensionale Gebiete sind, die mit jedem in  $\sigma$  ver-

1) Es sei dazu noch bemerkt, daß Punkte, über die hinaus sich die Bewegung nicht fortsetzt, (nach der Quasiergodenhypothese und dem Liouvilleschen Satz) nicht vorkommen können.

2) Nach den kanonischen Gleichungen ist  $Q$  nichts anderes als der Absolutwert der Fortschreitungs geschwindigkeit  $v$ .

laufenden „Strömungslinienstück“ genau je einen Punkt gemeinsam haben. Mit einem in einem Gebiet verlaufenden „Strömungslinienstück“ ist dabei ein kontinuierliches im Gebiet gelegenes Stück einer Strömungslinie gemeint, das einen Punkt der Begrenzung des Gebietes mit einem anderen derartigen Punkt verbindet.

Es seien nun  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  irgend zwei endliche  $(2rN - 1)$ -dimensionale äquivalente Gebiete der Energiefläche  $E_C$ . Da der Fortschrittsvektor  $v$  in  $\alpha_1$  und auf seiner Begrenzung eine stetige Funktion der Koordinaten ist, so ist  $v$  in  $\alpha_1$  auch gleichmäßig stetig und daher kann man eine positive Zahl  $\delta$  so bestimmen, daß in jedem  $(2rN - 1)$ -dimensionalen, in  $\alpha_1$  enthaltenen Teilgebiet  $\beta$ , dessen Volumen kleiner als  $\delta$  ist, die Fortschrittsrichtungen sich etwa um weniger als  $\pi/4$  voneinander unterscheiden. Man teile nun  $\alpha_1$  irgendwie in endlich viele  $(2rN - 1)$ -dimensionale Teilgebiete  $\beta_1^{(i)}$ , deren Volumina kleiner als  $\delta$  sind. Dann wird infolge der Strömung das Gebiet  $\alpha_2$  in die zu  $\beta_1^{(i)}$  äquivalenten Teilgebiete  $\beta_2^{(i)}$  zerlegt.

Innerhalb jedes unserer Teilgebiete  $\beta_1^{(i)}$  gibt es Strömungsröhren; denn man kann eine Basisfläche in  $\beta_1^{(i)}$  in noch sehr beliebiger Weise legen<sup>1)</sup> und hat nun einfach ein von ihr bei ihrer Strömung innerhalb  $\beta_1^{(i)}$  überstrichenen Gebiet ins Auge zu fassen. Ferner kann man mit endlich vielen solchen ganz in  $\beta_1^{(i)}$  gelegenen Strömungsröhren, sofern diese nur hinreichend klein genommen werden, das Gebiet  $\beta_1^{(i)}$  beliebig gut approximieren.

Einer Strömungsröhre  $\sigma_1$  in  $\beta_1^{(i)}$  entspricht in  $\beta_2^{(i)}$  ein äquivalentes Gebiet  $\sigma_2$ , das ebenfalls eine Strömungsröhre ist. Denn: Zwei Punkte, die auf einem „Strömungslinienstück“ von  $\beta_1^{(i)}$  liegen, gehen in zwei Punkte über, die auf einem „Strömungslinienstück“ von  $\beta_2^{(i)}$  liegen, und umgekehrt. Die Basis (und ebenso die Deckfläche) von  $\sigma_1$  geht also in ein  $(2rN - 2)$ -dimensionales Flächenstück über, das von jedem in  $\beta_2^{(i)}$  ver-

1) Z. B. nehme man ein Gebiet einer  $(2rN - 2)$ -dimensionalen Ebene, die senkrecht auf einem in  $\beta_1^{(i)}$  verlaufenden Strömungslinienstück steht.

laufenden „Strömungslinienstück“ in genau einem Punkt getroffen wird.

Da, wie leicht ersichtlich, durch hinreichende Verkleinerung eines Teilgebietes in  $\beta_1^{(i)}$  das äquivalente Teilgebiet in  $\beta_2^{(i)}$  beliebig klein gemacht werden kann, so wird durch hinreichende Verfeinerung der in  $\beta_1^{(i)}$  ausgeführten Strömungsröhrenteilung gleichzeitig mit  $\beta_1^{(i)}$  auch  $\beta_2^{(i)}$  beliebig gut approximiert.

## § 2.

Wir betrachten nunmehr zwei äquivalente Strömungsröhren  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Es sei  $\tau$  die Zeit, welche vergeht, bis durch die Strömung  $\sigma_1$  in  $\sigma_2$  übergeführt ist. Man fasse nun ein Zeitintervall  $(t_1 \dots t_n) = T$  ins Auge und verfolge während dieser Zeit ein Gassystem, das durch einen beweglichen Punkt  $G$  dargestellt ist. Während der Zeit  $T$  möge  $G$   $m_1$ -mal, bzw.  $m_2$ -mal von außen durch die Basisfläche in  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$  eintreten. Jedem Eintritt in  $\sigma_1$  entspricht nach Ablauf der Zeit  $\tau$  ein äquivalenter Eintritt in  $\sigma_2$ ; und jedem Eintritt in  $\sigma_2$  ist vor einer Zeit  $\tau$  ein äquivalenter Eintritt in  $\sigma_1$  vorausgegangen. Also wird  $G$  während der Zeit  $T + \tau = (t_1 \dots t_n + \tau)$  mindestens  $m_1$ -mal (genau:  $\bar{m}_2$ -mal) in  $\sigma_2$  und während der Zeit  $\tau + T = (t_1 - \tau \dots t_n)$  mindestens  $m_2$ -mal (genau:  $\bar{m}_1$ -mal) in  $\sigma_1$  eintreten. Daher:  $\bar{m}_2 \geq m_1$  und  $\bar{m}_1 \geq m_2$ .

Zwischen einem Eintritt von  $G$  in  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$  und dem nächsten darauffolgenden Austritt verstreicht eine Zeit  $\vartheta$ .  $\vartheta$  ist eine feste Zahl; denn sie stellt die Zeit dar, welche nötig ist, um die Basisfläche von  $\sigma_1$  in die Lage der Deckfläche von  $\sigma_1$  strömen zu lassen; und da zwei bewegliche Punkte derselben Strömungslinie (nach dem letzten Integral der kanonischen Gleichungen<sup>1)</sup>) beständig mit gleichem zeitlichen Abstand hintereinander herlaufen<sup>2)</sup>, so wird  $\vartheta$  den

1) Vgl. z. B. P. u. T. Ehrenfest, l. c., Nr. 9a, Formel (23c).

2) D. h.: Bewegen sich die Punkte  $A$  und  $B$  auf derselben Strömungslinie und sind  $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \dots, A_n B_n$  die Lagen von  $A$  bzw.  $B$  zu den Zeiten  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$ , so wird  $A$  zu den Zeiten  $t_1 + \vartheta, t_2 + \vartheta, t_3 + \vartheta, \dots, t_n + \vartheta, \dots$  die Lagen  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots$  einnehmen, wobei  $\vartheta$  eine feste Zahl bedeutet.

zeitlichen Abstand der Basis- und Deckfläche nicht nur in  $\sigma_1$ , sondern auch in  $\sigma_2$  darstellen.

Während der Zeitdauer  $\tau$  kann deshalb  $G$  höchstens  $\mu$ -mal in  $\sigma_1$  oder  $\sigma_2$  eintreten, wobei  $\mu = [\tau/\vartheta] + 1$  ist.

Also:

$$\begin{aligned} m_1 + \mu &\geq \bar{m}_1 \geq m_2, \\ m_2 + \mu &\geq \bar{m}_2 \geq m_1. \end{aligned}$$

Daher:

$$1 + \frac{\mu}{m_2} \geq \frac{m_1}{m_2} \geq 1 - \frac{\mu}{m_2}.$$

Vergrößert man das Zeitintervall  $T$  fortwährend, indem man  $t_1$  gegen  $-\infty$ ,  $t_2$  gegen  $+\infty$  rücken läßt, so müssen nach der Quasiergodenhypothese  $m_1$  und  $m_2$  beständig und zwar über alle Grenzen wachsen;  $\mu$  dagegen bleibt konstant.

Also:

$$\lim_{T=\infty} \frac{m_1}{m_2} = 1.$$

Es sei mit  $t_1$  bzw.  $t_2$  die Zeitdauer bezeichnet, welche  $G$  während des Ablaufs des Zeitintervalls  $T$  in  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$  verbringt. Dann ist

$$\begin{aligned} (m_1 + 1)\vartheta &> t_1 \geq (m_1 - 1)\vartheta, \\ (m_2 + 1)\vartheta &> t_2 \geq (m_2 - 1)\vartheta. \end{aligned}$$

Also:

$$(1) \quad \lim_{T=\infty} \frac{t_1}{t_2} = 1.$$

Diese zunächst für zwei äquivalente Strömungsröhren  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  abgeleitete Formel gilt nach § 1 auch für die Zeiten, welche der darstellende Punkt  $G$  in zwei beliebigen äquivalenten  $(2rN - 1)$ -dimensionalen Gebieten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  verbringt.

### § 3.

Es ist jetzt noch zu zeigen, daß die Beziehung (1) auch für zwei beliebige isometrische [nicht notwendig äquivalente]  $(2rN - 1)$ -dimensionale Gebiete  $\alpha$  und  $\lambda$  gilt.

Haben  $\alpha$  und  $\lambda$  nicht selbst ein  $(2rN - 1)$ -dimensionales Stück gemeinsam, so kann man es auf Grund der Quasi-

*ergodenhypothese* immer erreichen, daß  $\lambda$  durch eine Liouville'sche Strömung in eine äquivalente Lage  $\bar{\lambda}$  gebracht wird, so daß  $\kappa$  und  $\bar{\lambda}$  sicherlich ein  $(2rN - 1)$ -dimensionales Stück gemeinsam haben. Man braucht nämlich zu diesem Zweck nur irgendeinen inneren Punkt  $L$  von  $\lambda$  und einen inneren Punkt  $K$  von  $\kappa$  herauszugreifen und die Strömungsverschiebung dann so vorzunehmen, daß der  $L$  entsprechende Punkt  $\bar{L}$  in hinreichende Nähe von  $K$  gelangt.

$\kappa$  hat mit  $\lambda$  bzw.  $\bar{\lambda}$  ein oder mehrere  $(2rN - 1)$ -dimensionale Gebiete  $\nu$  gemeinsam. Wenn  $\kappa$  und  $\bar{\lambda}$  sich vollständig decken, dann haben wir äquivalente Gebiete und wir wären auf den Fall des § 2 zurückgeführt. Andernfalls hebe man die gemeinsamen Gebiete  $\nu$  aus  $\kappa$  und  $\bar{\lambda}$  bzw.  $\bar{\lambda}$  heraus; dann bleiben von  $\kappa$  bzw.  $\bar{\lambda}$  endlich oder höchstens abzählbar unendlich viele kleinere Gebiete  $\{\kappa_1^{(i)}\}$  bzw.  $\{\lambda_1^{(j)}\}$  übrig. Dabei ist

$$\sum_i \int_{\kappa_1^{(i)}} \frac{1}{Q} dS < \int_{\kappa} \frac{1}{Q} dS \quad \text{und} \quad \sum_j \int_{\lambda_1^{(j)}} \frac{1}{Q} dS < \int_{\bar{\lambda}} \frac{1}{Q} dS$$

und, wegen

$$\int_{\kappa} \frac{1}{Q} dS = \int_{\bar{\lambda}} \frac{1}{Q} dS,$$

auch

$$\sum_i \int_{\kappa_1^{(i)}} \frac{1}{Q} dS = \sum_j \int_{\lambda_1^{(j)}} \frac{1}{Q} dS.$$

Für ein oder mehrere Gebiete unter den  $\kappa_1^{(i)}$  besitzt

$$\int_{\kappa_1^{(i)}} \frac{1}{Q} dS$$

den größten Wert. Eines von diesen „Maximalgebieten“ sei mit  $\kappa_1^{(1)}$  bezeichnet. In analoger Weise werde ein Gebiet  $\lambda_1^{(1)}$  ausgewählt. Man verfähre nun mit  $\kappa_1^{(1)}$  und  $\lambda_1^{(1)}$  ebenso wie vorhin mit  $\kappa$  und  $\bar{\lambda}$ ; d. h. man verschiebe  $\lambda_1^{(1)}$  in eine äquivalente Lage  $\bar{\lambda}_1^{(1)}$  und führe hierdurch eine teilweise Deckung mit  $\kappa_1^{(1)}$  herbei. Hebt man dann die gemeinsamen Teile  $\nu_1$  heraus, so kommen höchstens abzählbar unendlich viele nicht gemeinsame kleinere Gebiete neu hinzu, die wir mit den von

vorhin noch übrigen zusammenfassen zu  $\{x_2^{(i)}\}$  bzw.  $\{\lambda_2^{(j)}\}$ . Hier-  
von werden wieder Maximalgebiete  $x_2^{(1)}$  bzw.  $\lambda_2^{(1)}$  ausgewählt, usw.

Das Verfahren kann man beliebig fortsetzen; nach  $n$  Ope-  
rationen hat man insgesamt höchstens abzählbar unendlich  
viele, noch nicht zur Deckung gebrachte Stücke  $\{x_n^{(i)}\}$  bzw.  $\{\lambda_n^{(j)}\}$ ,  
von denen dann je ein Maximalgebiet  $x_n^{(1)}$  bzw.  $\lambda_n^{(1)}$  ausgewählt  
wird.

Es ist dabei:

$$\sum_{i \in \alpha_n^{(i)}} \int \frac{1}{Q} dS < \dots < \sum_{i \in \alpha_2^{(i)}} \int \frac{1}{Q} dS < \sum_{i \in \alpha_1^{(i)}} \int \frac{1}{Q} dS < \int \frac{1}{Q} dS,$$

$$\sum_{j \in \lambda_n^{(j)}} \int \frac{1}{Q} dS < \dots < \sum_{j \in \lambda_2^{(j)}} \int \frac{1}{Q} dS < \sum_{j \in \lambda_1^{(j)}} \int \frac{1}{Q} dS < \int \frac{1}{Q} dS;$$

und

$$\sum_{i \in \alpha_n^{(i)}} \int \frac{1}{Q} dS = \sum_{j \in \lambda_n^{(j)}} \int \frac{1}{Q} dS.$$

Das Verfahren bricht entweder mit einem bestimm-  
ten  $n$  ab, indem sich hierfür  $\sum_i = \sum_j = 0$  ergibt; dann sind  
damit  $\alpha$  und  $\lambda$  stückweise vollständig zur Deckung gebracht.  
Oder das Verfahren läßt sich beständig für jedes noch so  
große  $n$  fortsetzen. In diesem Falle erhalten wir eine un-  
endliche Folge von monoton abnehmenden positiven Summen.  
Es muß also ein bestimmter Grenzwert existieren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in \alpha_n^{(i)}} \int \frac{1}{Q} dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in \lambda_n^{(j)}} \int \frac{1}{Q} dS = \sum_{\omega}.$$

Ist  $\sum_{\omega} = 0$ , so sind damit  $\alpha$  und  $\lambda$  stückweise vollständig  
zur Deckung gebracht. Ist  $\sum_{\omega} \neq 0$ , so setze man das Ver-  
fahren weiterhin beständig fort, indem man von den nunmehr  
noch übrigen, nicht zur Deckung gebrachten Stücken  $\{x_{\omega}^{(i)}\}$  bzw.  
 $\{\lambda_{\omega}^{(j)}\}$  ausgeht und analog dem früheren sukzessive zu  
 $\{x_{\omega+1}^{(i)}\}$ ,  $\{x_{\omega+2}^{(i)}\}$ , ...,  $\{x_{\omega+n}^{(i)}\}$ , ... bzw.  $\{\lambda_{\omega+1}^{(j)}\}$ ,  $\{\lambda_{\omega+2}^{(j)}\}$ , ...,  $\{\lambda_{\omega+n}^{(j)}\}$ , ...  
kommt. Bezeichnet man zur Abkürzung

$$\sum_{i \in \alpha_n^{(i)}} \int \frac{1}{Q} dS = \sum_{j \in \lambda_n^{(j)}} \int \frac{1}{Q} dS$$

mit  $\sum_a$ , dann erhält man also

$$\sum_{\omega} > \sum_{\omega+1} > \dots > \sum_{\omega+n} > \dots$$



Ein neuer Grenzprozeß liefert  $\sum_{\omega.2}$  usw.

Die weitere Fortsetzung des Verfahrens führt zu beständig monoton abnehmenden  $\sum_{\alpha}$ , wobei  $\alpha$  alle *transfiniten Zahlen der zweiten Zahlenklasse*<sup>1)</sup> durchläuft, die *kleiner* sind als eine gewisse transfinite Zahl  $\beta$  der zweiten Zahlenklasse. Für diese Ordnungszahl  $\beta$  muß

$$\sum_{\beta} = 0$$

sein und damit das Verfahren abbrechen.

Denn: Es ist  $(\sum_{\alpha} - \sum_{\alpha+1})$  ein positives Intervall (sofern  $\sum_{\alpha} > 0$  ist). Da man auf einer Geraden nur höchstens abzählbar unendlich viele, nicht übereinandergreifende Intervalle annehmen kann<sup>2)</sup>, so muß also unser Verfahren nach abzählbar vielen Schritten sicher sein Ende erreichen.

Nach höchstens abzählbar vielen Schritten sind also  $\kappa$  und  $\lambda$  stückweise vollständig zur Deckung gebracht<sup>3)</sup> und daraus folgt die *Gültigkeit der Formel (1)* für beliebige isometrische  $(2rN-1)$ -dimensionale Gebiete  $\kappa$  und  $\lambda$ .

#### § 4.

Die Formel (1) sagt demnach aus, daß die Zeit, welche ein Punkt  $G$  in verschiedenen Flächenstücken  $\alpha_i$  verbringt, (im Limes) proportional ist zu

$$\int_{\alpha_i} \frac{1}{Q} dS.$$

Geht man nun zu einem Flächenelement  $dS$  der Energiefläche über und setzt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{Q} = \sigma,$$

so ergibt sich aus (1) für die Zeit  $dt$ , während welcher ein Punkt  $G$  im Flächenelement  $dS$  angetroffen wird, die Formel:

1) Vgl. hierüber G. Cantor, Math. Ann. 21. p. 576. 1883; 49. p. 221. 1897.

2) G. Cantor, Math. Ann. 20. p. 118. 1882.

3) Es bereitet keine Schwierigkeit, jeden Schritt des Verfahrens dieses Paragraphen vollkommen eindeutig festzulegen, so daß man sicher ist, das Zermelosche Auswahlpostulat nicht benutzen zu müssen.



$$(2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{dt}{T} = \frac{\sigma dS}{\int \sigma dS},$$

wobei die Integration, hier sowie überall in diesem Paragraphen, über die ganze Energiefläche  $E_G$  zu erstrecken ist. (Dies ist Formel (34) bei Ehrenfest, l. c., p. 35.)

Bildet man mit Hilfe von (2) das *Zeitmittel* einer Phasenfunktion  $\psi(p, q)$  für die ganze Bewegung unseres Punktes  $G$ , so erhält man

$$(3) \quad \overline{\psi(p, q)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int \psi(p, q) dt}{T} = \frac{\int \psi \cdot \sigma dS}{\int \sigma dS}.$$

(Dies ist Formel (32) bei Ehrenfest, l. c., p. 34.)

Da die rechte Seite von (3) vollständig unabhängig von der einzelnen Bahn ist, so muß auch die linke Seite davon unabhängig sein, d. h.: Für alle Bahnkurven unserer Energiefläche ergibt sich dasselbe Zeitmittel einer Phasenfunktion  $\psi(p, q)$ .

Betrachten wir nun noch die *stationären Dichteverteilungen* auf der Energiefläche  $E_G$ .<sup>1)</sup>

Es sei eine Punktmenge über  $E_G$  derart verteilt, daß ihre „Flächendichte“  $\sigma_0(p, q)$  stationär ist. Es bleibt daher die Verteilung in jedem festen  $(2rN - 1)$ -dimensionalen „Flächestück“ zeitlich konstant. Ferner muß die Verteilung in einem nicht festen, sondern der zeitlichen Strömung folgenden Flächestück erhalten bleiben. Also ergibt sich die Gleichheit des Ausdrucks

$$\text{Mittlere Dichte} \times \text{Flächeninhalt}$$

für je zwei äquivalente Stücke. Dasselbe erhält man auch für irgend zwei isometrische  $(2rN - 1)$ -dimensionale Gebiete, da diese nach § 3 mit Hilfe der Strömung stückweise vollständig zur Deckung gebracht werden können. Läßt man nun zwei

1) Wird bei einer stationären Verteilung auf  $E_G$  die „Flächendichte“ mit  $\sigma_0(p, q)$  bezeichnet, so folgt aus dem Liouvilleschen Satz, daß  $\sigma_0$   $Q$  längs jeder Bahnkurve eine Konstante ist, die sich allerdings von Bahn zu Bahn noch ändern könnte. (Vgl. P. u. T. Ehrenfest, l. c., Nr. 9 d.) Nimmt man aber noch die Quasiergodenhypothese hinzu, so kann, wie im Text gezeigt wird, jene Konstante *nicht* von Bahn zu Bahn wechseln.

solche isometrische Gebiete sich in isometrischer Weise gegen irgend zwei Punkte zusammenziehen, so ergibt sich in beiden Punkten für  $\sigma_0 Q$  der gleiche Wert. Daher ist allgemein auf der ganzen Energiefläche  $E_C$

$$(4) \quad \sigma_0(p, q) = \frac{k}{Q(p, q)} = k \cdot \sigma(p, q),$$

wobei  $k$  eine auf der ganzen Energiefläche konstante Zahl ist. Also ist diese sog. „ergodische“ *Flächendichteverteilung* die *einzige stationäre Verteilung* auf  $E_C$ .

München, im Dezember 1913.

(Eingegangen 31. Dezember 1913.)

**5. Einfluß von Röntgen-, ultravioletten, Becquerelstrahlen und des elektrischen Wechselfeldes auf die Schallgeschwindigkeit in Gasen;  
von Walter Küpper.**

(Auszug aus der Dissertation Marburg 1912.)

Unberührt durch die Quantentheorie gelten für vollkommene Gase bei gewöhnlicher und höherer Temperatur die Überlegungen der „klassischen Theorien“ über den Wert  $\alpha$  des Verhältnisses der spezifischen Wärmen  $C_p/C_v$  bei konstantem Druck ( $C_p$ ) und konstantem Volumen ( $C_v$ ). Sie ergeben für einatomige Gase den Betrag 1,66...<sup>1)</sup>. Bei Berechnung von  $\alpha$  für Gase mit mehr als einem Atom in der Molekel ergeben sich dagegen je nach den Annahmen über die Konstitution der Molekeln verschiedene  $\alpha$ -Werte.

Sowohl Boltzmann<sup>2)</sup> als auch Maxwell<sup>3)</sup> haben den Versuch gemacht, das Verhältnis der spezifischen Wärmen aus bestimmten Voraussetzungen über die Zusammensetzung der Molekeln abzuleiten, und sind beide den tatsächlichen Verhältnissen ziemlich nahe gekommen.

Boltzmann nimmt an, daß bei mehratomigen Gasmolekeln eine vollkommen starre Verbindung der einzelnen Atome vorhanden ist, wobei diese selbst ihre „volle Elastizität“ im verallgemeinerten Sinne beibehalten. Maxwell hingegen setzt voraus, daß die Atome innerhalb der Molekel vollkommen frei beweglich sind.

1) Vgl. z. B. H. v. Helmholtz VI, Theorie der Wärme (herausgeg. v. F. Richarz) 1903. p. 406.

2) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. Wiener Akad. der Wissenschaften (Math. Cl. 2. Abt.) 53. p. 195, 1866; 63. p. 712, 1871; 74. p. 553, 1876; 90. p. 231, 1884.

3) J. Cl. Maxwell, Journ. of the chemic. Soc. 13. p. 496. London 1875.

Bei der Durchrechnung unter den Boltzmannschen Voraussetzungen, wie sie Kirchhoff<sup>1)</sup> in seiner Vorlesung über die Wärme angedeutet hat, ergibt sich für zweiatomige Gase der Wert  $\alpha = C_p/C_v = 1,40$ . Legt man hingegen die Maxwell'schen Annahmen zugrunde, so wird dieser Wert gleich 1,33...

Einem zweiatomigen Gase kommen also die Werte  $\alpha = 1,40$  oder 1,33... zu, je nachdem man die Boltzmannsche oder die Maxwell'sche Theorie zugrunde legt. Tatsächlich wird jedoch kein Gas vollkommen eine der beiden Voraussetzungen erfüllen, es wird weder nur aus vollkommen starren Molekeln noch allein aus Molekeln mit vollkommen frei beweglichen Atomen bestehen können. Vielmehr wird das Gas sich in seinem  $\alpha$ -Wert nur mehr oder weniger einem der beiden Grenzwerte nähern. Daraus erhellt sofort, daß alle Werte für  $\alpha$  von vollkommenen zweiatomigen Gasen zwischen 1,33... und 1,40 liegen müssen, diesen Grenzen beliebig nahe kommen können, jedoch sind Werte von  $\alpha$  größer als 1,40 nach den angestellten Betrachtungen für sie ausgeschlossen.

Die experimentell gefundenen  $\alpha$ -Werte, die für fast alle Gase mit ziemlicher Genauigkeit vorliegen, haben mit guter Übereinstimmung jene Theorie bestätigt.<sup>2)</sup> Bei einer von E. Rohlfs<sup>3)</sup> ausgeführten  $\alpha$ -Bestimmung für frischbereiteten reinen elektrolytischen Sauerstoff fand dieser den abnorm hohen Betrag  $\alpha = 1,450$ . Durch systematische oder Versuchsfehler ließ sich diese Abweichung von allen bisher bekannten Werten durchaus nicht erklären, so daß eine prinzipiell andere Ursache, die sich zunächst nicht erklären ließ, die Erhöhung von  $\alpha$  herbeigeführt haben mußte. Auch K. H. Küster<sup>4)</sup> fand, wenn er Sauerstoffgas untersuchte, welches längere Zeit über käuflichem Phosphorpentoxyd gestanden hatte, gegen den Normalwert 1,40 Erhöhungen bis zu 1,43.

1) G. Kirchhoff, Vorl. über math. Physik, Wärme, 1894. Die Durchführung der Rechnung vgl. W. Küpper, Inaug.-Diss. Marburg 1912, p. 8ff.

2) Eine Zusammenstellung von  $\alpha$ -Werten vgl. bei Landolt und Börnstein, Phys. chem. Tabellen. 4. Aufl. 1912. p. 775ff.

3) E. Rohlfs, Inaug.-Diss. Marburg 1909. p. 13ff.

4) K. H. Küster, Inaug.-Diss. Marburg 1911.

F. Richarz<sup>1)</sup> kam daher auf die Vermutung, daß diese merkwürdige Beobachtung mit einer Ionisation des Sauerstoffgases zusammenhängen könne. Küster (und auch Rohlf) hatte zu seinen Versuchen  $P_2O_5$  als Trockenmittel verwandt; dieses enthält meist geringe Mengen von  $P_4O_6$  beigemischt, welches nach R. Schenck<sup>2)</sup> ionisierend wirkt.

Bestärkt wurde noch diese Vermutung durch eine Reihe von Versuchen, bei der Küster das verwendete Gas der Einwirkung einer kräftigen Ionisationsquelle unterwarf. Bestrahlte er nämlich seine trockene Luft enthaltende Versuchsröhre mit Röntgenstrahlen, so ermittelte er nach einer Bestrahlung von 20 Minuten ein Hinaufgehen des  $\alpha_{\text{Luft}}$ -Wertes von 1,40 bis auf 1,46.<sup>3)</sup>

Aufgabe der vorliegenden Untersuchung war es nun, systematisch den Einfluß verschiedener Ionisationsquellen auf die Schallgeschwindigkeit in zweiatomigen Gasen und auf das Verhältnis der spezifischen Wärmen zu studieren und die von F. Richarz ausgesprochene vermutliche Erklärung jener von Rohlf und Küster beobachteten Erscheinungen zu prüfen.

#### Beschreibung der Meßmethode.

Rohlf und Küster führten, wie auch ich, die  $\alpha$ -Bestimmungen nach der akustischen Methode durch. Die Schallgeschwindigkeit  $v$  in einem Gase ist nach Laplace:

$$v = \sqrt{\frac{p \cdot \alpha}{\mu}},$$

worin  $p$  den Druck des zu untersuchenden Gases und  $\mu$  seine Dichte bedeutet.

Werden Wellenlänge  $\lambda$  und Schwingungszahl  $\nu$  eingeführt, so wird:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{1}{\nu} \sqrt{\alpha \cdot \frac{p}{\mu}}$$

1) F. Richarz, Sitz.-Ber. d. Ges. zur Beförd. d. ges. Naturwissensch. Marburg 1911. p. 111.

2) R. Schenck u. F. Mihr, Ber. d. Deutsch. chem. Ges. 1906 (2) 39. p. 1506.

3) K. H. Küster, l. c. p. 40.

und

$$\alpha = v^2 \lambda^2 \frac{\mu}{p} = \frac{v^2 \lambda^2}{R \cdot T},$$

wo  $R$  die Gaskonstante und  $T$  die absolute Temperatur.

Die Größen  $\mu$  und  $p$  sind immer direkt meßbar, während dies für  $v$  nur bei Luft unmittelbar möglich ist.

Für andere Gase bestimmt man die Schallgeschwindigkeit aus der Wellenlänge stehender Wellen, ähnlich der bekannten Kundtschen Versuchsanordnung zur Ermittlung von  $\lambda$  mittels Staubfiguren. Anstatt nacheinander die Wellenlänge eines Tones in Luft und einem anderen Versuchsgase zu bestimmen, verwendet man mit Vorteil zwei gleiche Rohre, von denen das eine mit Luft gefüllt ist, während das zweite das Versuchsgas unter demselben Druck und derselben Temperatur enthält. Erregt man nun in beiden Röhren stehende Wellen mit der gleichen Tonquelle, so läßt sich durch bloße Messung der Wellenlängen der Wert für  $\alpha$  des Versuchsgases aus dem bekannten Werte  $\alpha$  für Luft berechnen. Bei ein und demselben Gase wird aus einer Vergrößerung der Wellenlänge im allgemeinen nach der Laplaceschen Formel, wenn  $\mu$  und  $p$  konstant bleiben, was zunächst anzunehmen ist, auf ein Anwachsen des Wertes von  $\alpha$  zu schließen sein.

Ein solches Hinaufgehen der Wellenlängen, sowie des  $\alpha$ -Wertes von zweiatomigen Gasen bei Bestrahlung über den Normalwert von 1,40 hinaus würde im Resultate entsprechen einer Annäherung des Gases an den einatomigen Zustand. Eine derartige Annäherung tritt ein, wenn die Molekeln des zweiatomigen Gases teilweise dissoziiert werden. In dieser Weise könnte eine Änderung der Schallgeschwindigkeit in Zusammenhang stehen mit einer ionisationsähnlichen Wirkung der verwandten Bestrahlungsquellen, die durch gleichzeitige Leitfähigkeitsmessungen kontrolliert werden kann. Deshalb wurden im folgenden neben den Wellenlängenmessungen auch solche der Leitfähigkeit des bestrahlten Gases durchgeführt.

Die theoretischen Schlußfolgerungen aus den Versuchen sollen am Schluß der Arbeit eingehend erörtert werden.

#### Die Versuchsanordnung.

Die von mir benutzte Versuchsanordnung gliedert sich in vier ihrer Bedeutung nach von einander getrennte Teile: in

die Meßröhren, die Schallquelle und Abhörvorrichtung, die Bestrahlungsquellen und endlich die Gasdarstellung und Reinigung.

### 1. Die Meßröhren.

Die geringe zu erwartende Änderung der Wellenlängen nötigte mich, den größten Wert auf die Ermöglichung einer peinlich genauen Durchführung der einzelnen Messungen der Wellenlängen im Meßrohr zu legen. Deshalb wurde im hiesigen Institut durch Küster und mich statt der gebräuchlichen Quinckesch<sup>1)</sup> Abhörvorrichtung die im folgenden beschriebene ausgebildet.

Da mir die zu untersuchenden Gase in beliebigen Mengen zur Verfügung standen, brauchte ich keinen Wert auf kleine Abmessungen der Meßröhren zu legen. Die Wahl von weiten Rohren ermöglichte eine gleichzeitige Bestrahlung eines größeren Volumens des Gases; auch wurde damit zugleich erreicht, daß der Einfluß der Röhrenwände auf Reibung und Wärmeleitung<sup>2)</sup> sicher nicht in Betracht kam.

Die beiden übrigen ganz gleichen Meßröhren bestanden aus Glasröhren von ca. 90 cm Länge und einer lichten Weite von 61 mm bei einer Wandstärke von ca. 1 mm. In beide Enden waren Messingrohre von 13 cm Länge und 60 mm äußerer Weite eingekittet, die ein festes Montieren des ganzen Rohres auf einem Grundbrett ermöglichten, um Spannungen der Glasröhren nach Möglichkeit fern zu halten (vgl. Fig. 1).

Beide Versuchsröhren waren nebeneinander in horizontaler Lage auf dem Experimentiertisch befestigt, um möglichst Gleichheit der Versuchsbedingungen zu erzielen.

Das zur Erregung der Röhre dienende Telephon *A* (Fig. 1) war ein Präzisionstelephon mit 200 Ohm Widerstand, sowie variierbarem Abstand von Magnet und Eisenmembran.

1) G. Quincke, Wied. Ann. **63**. p. 66. 1898; A. Kalähne, Hab.-Schrift Heidelberg 1902; Ann. d. Phys. **11**. p. 225. 1902; W. Fürstenau, Inaug.-Diss. Gießen 1908, auch Berlin, Verlag v. R. Trenkel.

2) Aug. Kundt, Pogg. Annalen **135**. p. 177. 1868; H. v. Helmholtz Wissenschaftl. Abh. **1**. p. 338; G. Kirchhoff, Pogg. Ann. **134**. p. 177. 1868; H. Schneebeli, Pogg. Ann. **136**. p. 296. 1869; Webster Low, Wied. Ann. **52**. p. 641. 1894; E. H. Stevens, Drudes Ann. **7**. p. 285. 1902; F. A. Schulze, Marb. Sitzungsber. p. 59—64. 1908.



In der Röhre war ein ca. 160 cm langer Stempel verschiebbar, bestehend aus einem 13 mm weiten Messingrohr mit 1 mm Wandstärke. An seinem in das Versuchsrohr hineinragenden Ende war die Höhlung des Stempels mit einem Hartgummipfropfen luftdicht verschlossen, der eine Gabel aus Messingblech trug, auf die eine Mikrophonkapsel aufgelötet war. Die beiden Zuführungsdrähte zum Mikrophon waren ebenfalls luftdicht durch den Stöpsel geführt und durch den Stempel nach außen geleitet.

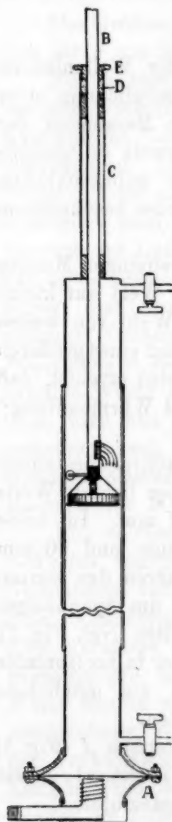


Fig. 1.

Das zweite Ende der Versuchsrohre war verschlossen durch eine eingeschraubte Messingscheibe mit 25 mm weiter Bohrung, in die ein passendes, 30 cm langes Rohr eingelötet war. Diese Messingröhre enthielt noch eingelötet in der aus Fig. 1 ersichtlichen Weise zwei Ringe von je 3 cm Länge, die den zwischen den Röhren *B* und *C* entstehenden Hohlraum vollkommen verschlossen, während das äußere Ende *D* als Stopfbuchse eingerichtet war. Diese Stopfbuchse füllte ich mit Hanf, den ich vorher mit Hahnfett tränkte, und preßte ihn durch eine Verschraubung *E* in gewünschtem Maße zusammen.

Schmierte ich nun noch den sauber polierten Stempelschaft mit etwas Hahnfett ein, so war eine leichte Beweglichkeit des durch die erläuterte Einrichtung zugleich in guter Führung laufenden Stempels bei guter Abdichtung gesichert.

Um die abgehörten ausgezeichneten Stellen zu markieren, brachte ich folgende, von M. Robitzsch<sup>1)</sup> ähnlich angegebene Registriermethode an. Eine von einem Schlitten geführte Eichenholzleiste von 120 cm Länge war durch einen Messingbügel starr mit der

1) M. Robitzsch, Inaug.-Dissert. Marburg 1910; Ann. d. Phys. 38. p. 1027 ff. 1912.



parallel verlaufenden Führungsstange verbunden. Senkrecht zur Ebene der Stange war in entsprechender Weise in einem Lager ein scharfes Messingrädchen angebracht, das sich gegen die Leiste bewegen ließ. Auf der Leiste befestigte ich einen Streifen von Kartonpapier. Hatte ich durch Abhören eine Maxima- resp. Minimastelle aufgefunden, so brauchte ich nur das Rädchen gegen den Streifen zu drücken und erhielt so scharfe Striche in Abständen von je  $\lambda/4$ . Auf diese Weise konnte ich jeden Versuch nachträglich ausmessen und Ablesefehler vermeiden.

## 2. Die Schallquelle und Abhörvorrichtung.

Von großer Wichtigkeit für tadelloses Funktionieren der Resonanzmethode ist die gute Beschaffenheit der Tonquelle. Dieselbe muß vor allem konstant sein, von äußeren Einflüssen unabhängig und endlich längere Zeit ohne jede Wartung arbeiten.

Diese Eigenschaften besitzt in befriedigender Weise ein durch einen Saitenunterbrecher<sup>1)</sup> erregtes Telephon, unter Zwischenspaltung einer Induktionsspule.

Die das Meßrohr abschließende Telephonmembran erregt durch ihr Vibrieren die im Meßrohre befindliche Gassäule zu stehenden Wellen, die auch die Mikrophonmembran des Stempels je nach dessen Stellung im Rohre mehr oder weniger zum Mitschwingen bringen. Das Mikrophon bildete mit einem Regulierwiderstand und einem wieder wie oben induktiv gekoppelten Telephon den Stromkreis eines Akkumulators. Dieses letztere, ans Ohr gehaltene Telephon schwingt durch die im Mikrophon hervorgerufenen Schwankungen der Stromintensität. Diese Abhörvorrichtung gestattete leicht, die Lage der Maxima und Minima mit großer Genauigkeit zu bestimmen.

Zunächst hatte ich beabsichtigt, die Beobachtungsmethode statt einer subjektiven zur objektiven zu gestalten, indem ich entweder den pulsierenden Gleichstrom des Mikrophones oder den Wechselstrom der eingeschalteten Induktionsspule durch

1) M. J. Pupin, Lill. Americ. Journ. 3. p. 45, 325. 1898; L. Arons, Wied. Ann. 66. p. 1177. 1898; E. Orlich, Elt. Zeitschr. p. 502. 1903; A. Kalähne, Ann. 11. p. 235. 1903; W. Fürstenau, Diss. Gießen p. 12. 1908; W. Küpper, Inaug.-Diss. Marburg p. 35 f. 1912.

Ausschläge eines geeigneten Instrumentes, z. B. eines Saitengalvanometers maß.

Da mir ein geeignetes Instrument jedoch nicht zugänglich war, mußte ich von dieser Anordnung absehen und verwandte die oben angedeutete Methode.

Die Stellen der Maxima und Minima ließen sich dadurch sehr scharf bestimmen,<sup>1)</sup> daß die Einstellung auf das Mitklingen eines hohen Obertons innerhalb des noch etwas ausgedehnten Maximums und Minimums des Grundtones erfolgte. Dieser harmonische Oberton ließ sich bequem durch eine geringe Veränderung des Abstandes von Membran und Magnet des als Schallquelle dienenden Telephons verstärken. Die Genauigkeit und gute Übereinstimmung der so gemessenen Wellenlängen sei durch eine willkürlich herausgegriffene Messungsreihe gezeigt.

Werte von  $\lambda/4$  im Versuchsrohr: 7,21 7,20 7,20 7,21 7,19 7,21 cm

" " " " Vergleichsrohr: 7,20 7,20 7,20 7,22 7,18 7,20 "

Die maximale Differenz beträgt also, auch bei anderen Messungen, höchstens 0,02 cm.

### 3. Die Bestrahlungsquellen.

#### a) Anordnung der Röntgenröhre.

Zur Einwirkung der Röntgenstrahlen auf das zu untersuchende Gas verwandte ich Intensivstrom = Röntgenröhren von Gundelach, Gehlberg in Thüringen. Zur Speisung diente ein größeres Induktorium von ca. 35 cm Schlagweite mit Wehneltunterbrecher. Die primäre Stromstärke betrug durchschnittlich 13—15 Ampere bei 65 Volt Spannung.

Zur Vermeidung einer Einwirkung des Induktoriums auf die als Schallquelle dienenden Telephone der Meßrohre dienten Kappen aus Weicheisen, welche die Telephone umgaben.

Das Röntgenrohr befand sich in solcher Lage über dem Untersuchungsrohr, daß der Antikathodenspiegel die Röntgenstrahlen möglichst senkrecht nach unten auf die Meßröhre warf, und zwar so, daß der Hauptanteil gerade zwischen zwei Knotenpunkten einer Schallwelle auftraf. Die Entfernung des

1) Vgl. auch K. H. Küster, l. c. p. 28.

Röntgenspiegels vom Untersuchungsrohr betrug durchschnittlich 12 cm.

b) Quarzquecksilberlampe.

Zur Erzeugung der ultravioletten Strahlen diente eine Quarzquecksilberlampe der Firma W. C. Heraeus, Hanau a. M., mit einer normalen Betriebsspannung von 75 Volt.

Da die Glaswände der Versuchsröhre den größten Teil des kurzwelligen ultravioletten Lichtes absorbiert haben würden, ließ ich mir vom Glasbläser etwa in der Mitte des Rohres eine rechteckige Öffnung von 10 cm Länge und 8 cm Höhe herausschneiden und kittete auf sie mit Asphaltkitt ein passendes ca. 0,8 mm dickes Quarzfenster auf, das Heraeus anfertigte. Zur Kühlung blies während des Versuchs ein Ventilator einen Luftstrom gegen das Rohr. Die Entfernung von Lampe und Meßrohr betrug durchschnittlich 2 cm.

c) Wechselfeld.

Das Wechselfeld wurde erzeugt zwischen zwei Messingplatten von je  $15 \times 8$  cm Größe. Die Platten waren, zur Vermeidung von Büschelentladungen, eingebettet in eine 3 cm dicke Schicht von Paraffin, dem zur besseren Haftung etwas Kollophonium zugesetzt war. An die beiden Platten waren die sekundären Pole eines Induktoriums von etwa 15 cm maximaler Schlagweite angeschlossen. Als Unterbrecher mußte in Ermangelung eines geeigneteren ein Wehneltunterbrecher genommen werden.

Durch Vorversuche wurde festgestellt, daß beim Zwischenchieben des Mikrophons in das Wechselfeld keine Einwirkung des Feldes auf das Mikrophon eintrat.

d) Radiumbestrahlung.

Zu den Radiumversuchen benutzte ich zwei kleine im Institut vorhandene Radiumpräparate von je 3 mg reinem Radiumbromid, und zwar geöffnet und geschlossen.

4. Die Temperaturmessungen.

Zur Bestimmung der kleinen bei Bestrahlung eintretenden Temperaturerhöhung des Versuchsgases benutzte ich Thermoelemente, die ihrer geringen thermischen Trägheit wegen sich als besonders geeignet erwiesen. *Jedes Kupfer-Eisen-Element*

hatte eine Länge von drei Metern, je fünf bildeten eine Thermosäule. Wie aus Fig. 1 (p. 910) ersichtlich, war in dem Führungsrohr hinter dem Kolben eine Hartgummibüchse eingefügt, durch die alle Drähte der Elemente isoliert nach dem Inneren des Messingrohres geführt waren. Die Lötstellen an den anderen Enden der Säule waren von Versuchs- und Kontrollrohr gemeinsam, vor Luftströmungen geschützt, angebracht und befanden sich immer auf Zimmertemperatur.

Die Thermosäule war an ein störungsfreies Drehspulensinstrument mit objektiver Spiegelablesung angeschlossen und mit einem Normalthermometer geeicht. Die Eichung wurde vor jeder Versuchsreihe einer Nachprüfung unterzogen und wenn nötig korrigiert.

Die Temperaturzunahme des bestrahlten Gases allein ist durch die damit verbundene Dichtigkeitsänderung des untersuchten Gases natürlich auch von Einfluß auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in ihm, sowie auf den Wert von  $\kappa$ . Die Abhängigkeit des  $\kappa$ -Wertes von der Temperatur ist gegeben durch die Relation

$$\kappa_2 = \kappa_1 \cdot \frac{\lambda_2^2 (1 + \alpha t_1)}{\lambda_1^2 (1 + \alpha t_2)},$$

worin  $\alpha$  der Ausdehnungskoeffizient des Gases ist und  $\kappa_2$  den gesuchten Wert bei der neuen Temperatur  $t_2$  angibt.

### Versuchsergebnisse.

#### 1. Luftmessungen.

Zur Untersuchung eignet sich selbstverständlich nur vollkommen staubfreie, trockene Luft, worauf besonders Rutherford<sup>1)</sup> hinweist. Eine Wasserstrahlpumpe sog die Luft durch ein Wattefilter, wodurch sie von ihren festen Verunreinigungen befreit wurde, darauf durch eine Röhre mit Natronkalk zur Bindung der mitgeführten Kohlensäure; sodann perlte die Luft durch ein Pettenkofersches Absorptionsrohr mit konzentrierter Schwefelsäure und gelangte durch eine Glasspirale in die hintereinander geschalteten Meßröhren. Die Glasspirale stand in einem Dewarschen (Weinholdschen) Gefäße und

1) Rutherford, Radioactivity p. 39.

wurde durch flüssige Luft gekühlt; dabei kondensierten sich etwa mitgerissene Schwefelsäure- und Wasserdämpfe.

a) Röntgenbestrahlung.

Zur Feststellung der zeitlichen Einwirkung der Bestrahlung dienten zunächst die folgenden Versuche.

Tabelle I.

Röntgenbestrahlung von trockener Luft.  
Versuchstemperatur 18,7° C.

Zeit Minuten	Halbe Wellenlängen im		Temperatur- erhöhung	Erhöhter $\alpha$ -Wert $\alpha_x$
	Versuchsrohr cm	Kontrollrohr cm		
0	16,02	16,02	0,0°	Normalwert 1,4047
5	16,04	16,02	0,2°	1,407
10	16,08	16,02	0,6°	1,412
15	16,13	16,02	1,1°	1,421
20	16,20	16,02	1,6°	1,429
25	16,23	16,02	2,0°	1,429
30	16,25	16,02	2,5°	1,433
35	16,26	16,02	2,9°	1,433

Die in der Kolonne 5 dieser Tabelle berechneten  $\alpha$ -Werte sind wegen der Temperaturerhöhung auf  $X^\circ$  korrigiert nach der p. 914 angegebenen Formel

$$\alpha_2 = \alpha_1 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \frac{273 + 18,7}{273 + X};$$

die Werte geben also lediglich den Einfluß durch Bestrahlung (ohne Temperaturerhöhung) wieder; die gleichzeitig dabei hervorgerufene Erwärmung (Kol. 4) des Versuchsgases ist also schon berücksichtigt und korrigiert.

Ohne eine Bestrahlung des Röntgenrohres würde die Nichtberücksichtigung einer Temperaturerhöhung des Gases um 23,9° C erst eine Erhöhung von  $\alpha = 1,4048$  auf jenen Wert  $\alpha = 1,43$  ergeben. Es ist also ausgeschlossen, daß etwa nur durch eine unsichere Temperaturbestimmung die sich ergebende  $\alpha$ -Erhöhung erklärt werden könnte. Einen weiteren Beweis, daß nicht die Erwärmung Ursache der  $\lambda$ -Vergrößerung sein kann, vgl. p. 918.

Als halbe Wellenlänge des Versuchsrohres ist bei den Messungen immer diejenige angenommen, die im Hauptbereiche der Bestrahlung gelegen hatte und demzufolge die größte Abweichung vom normalen Werte zeigte. Das  $\lambda/2$  der Vergleichsröhre der Tabellen bedeutet das Mittel aller in dem Rohr gemessener  $\lambda/2$ , oder was dasselbe ergibt, das Mittel aus den an den nicht bestrahlten Enden des Versuchsrohres ermittelten Wellenlängen.

Aus der Tabelle geht also hervor, daß die Wellenlänge bis 10 Minuten nur langsam anwächst, dann in den folgenden 10 Minuten rasch zunimmt, bis sie endlich nach 30 Minuten Bestrahlung ihrem Maximum nahe gekommen zu sein scheint. Nach dem Ausschalten der Röntgenröhre blieb zunächst noch ein geringer Rest der Wellenlängenvergrößerung bestehen, nach etwa 10 Minuten herrschte wieder der gleiche Wert in beiden Röhren.

Bei den weiteren Versuchen, wo mir daran lag, möglichst das Maximum der Wellenlängenänderung aufzufinden, wählte ich deshalb als Bestrahlungszeit die sich aus obiger Tabelle ergebende von etwa 30 Minuten. Längere Bestrahlungen verboten sich auch in Hinsicht auf die Lebensdauer der Röntgenröhren. Weitere Bestrahlungen von Luft ergaben die folgenden Wellenlängenänderungen.

Tabelle II.

Röntgenbestrahlung von trockener Luft.

<i>T</i> Min.	Halbe Wellenlängen im Versuchsrohr cm	Kontrollrohr cm	Zimmer- temperatur	Temperatur- erhöhung	Im Mittel
25	16,40	16,00	17,2°	3,4°	} Starke Ver- größerung von $\lambda/2$ um 0,23 cm
30	14,63	14,40	18,7°	2,2°	
30	17,45	17,20	19,8°	2,5°	
30	19,26	19,00	16,8°	2,6°	

b) Einwirkung des ultravioletten Lichtes.

Setzte ich die Luft im Versuchsrohr sodann durch das Quarzfenster hindurch einer Bestrahlung mittels der Quarz-quecksilberlampe aus, so bemerkte ich bereits nach geringer

Bestrahlungsdauer eine kräftige Bildung von Ozon, das natürlich durch seine dreiatomigen Molekeln die Schallgeschwindigkeit verkleinern mußte, wie auch beobachtet wurde.<sup>1)</sup>

c) Einfluß des Wechselfeldes.

Auch die Einwirkung des Wechselfeldes ergab Bildung von Ozon, wenn auch in weit schwächerem Maße als durch die ultravioletten Strahlen, wobei ich eine geringe *Verkleinerung* der Wellenlänge beobachtete. Bei diesen, wie bei allen angestellten Wechselfeldversuchen trat keine Temperaturerhöhung des Versuchsgases ein.

d) Radiumbestrahlung.

*Ohne* meßbare *Einwirkungen* blieben die Bestrahlungen mit Radiumpräparaten, die ich sowohl geschlossen als auch geöffnet auf die Versuchsluft einwirken ließ.

Vielleicht ist das Ausbleiben der Vergrößerung der Schallgeschwindigkeit darin zu suchen, daß die zur Verfügung stehende Menge von 3 mg Radiumbromid zu gering war, um meßbare Einwirkungen zu ergeben. Vermutlich wird eine größere Quantität Radiumbromid ebenfalls eine Änderung der Wellenlängen hervorzurufen vermögen.<sup>2)</sup>

2. Sauerstoffversuche.

Die Sauerstoffdarstellung geschah durch Elektrolyse verdünnter Schwefelsäure mit Platinelektroden.<sup>3)</sup>

Der entwickelte Sauerstoff wurde in einer mit Natronkalk gefüllten Röhre von den mitgeführten Säuren (Schwefel- und Überschwefelsäure) befreit. Zur Beseitigung von Ozon, Wasserstoffsuperoxyd, und etwa mitgeführten Wasserstoffes strich dann das Gas durch ein glühendes Kupferrohr, das mit granuliertem Kupferoxyd gefüllt war. Das Ozon zerfällt in der Hitze

1) Im Gegensatz zum Quecksilberlicht ist die Ozonbildung der Röntgenstrahlen eine ganz minimale.

2) Diese schwache Ionisationswirkung derselben Präparate wurde auch schon bei Kondensationsversuchen von K. Schaum, Ztschr. f. w. Phot. 3. p. 239 ff. 1905 u. E. Barkow, Ann. d. Phys. 23. p. 330. 1907 beobachtet.

3) W. Küpper, Diss. Marburg. 1912. p. 47.



zu elektrisch neutralem Sauerstoff, zwei  $\text{H}_2\text{O}_2$ -Molekeln in  $2\text{H}_2\text{O} + \text{O}_2$ . Der Wasserstoff endlich wird zu Wasser oxydiert.

Die Wellenlängenmessungen in Sauerstoff sind im folgenden aufgeführt.

Tabelle III.

Röntgenversuche.

Bestrah- lungszeit	Halbe Wellenlängen $\lambda/2$ im Versuchsrohr cm	Kontrollrohr cm	Zimmer- tempe- ratur	Tempe- raturer- höhung	Im Mittel
30 Min.	18,24	18,01	24,5°	2,0°	} Kräftige Vergröße- rung von $\lambda/2$ um 0,23 cm
30 "	13,40	13,20	18,5°	1,5°	
35 "	14,00	13,75	25,4°	2,3°	
30 "	14,05	13,80	20,8°	2,2°	
30 "	14,74	14,50	23,0°	1,6°	

## Quecksilberlampe.

30 Min.	13,96	14,05	26,0°	2,1°	} Ver- kleinerung von $\lambda/2$ um ca. 0,1 cm (Ozonbildg.)
35 "	13,70	13,79	25,9°	2,1°	
30 "	13,48	13,50	17,9°	2,7°	
40 "	14,63	14,70	23,0°	2,9°	
25 "	13,46	13,43	18,1°	1,9°	

Die Versuche mit der Quecksilberlampe zeigen nochmals, wie unwahrscheinlich die bereits auf p. 915 widerlegte Annahme wäre, daß Temperaturerhöhung die Ursache der in den anderen Fällen beobachteten Schallgeschwindigkeitsvermehrung sein könnte. Denn bei der Quecksilberlampe sind die gemessenen Temperaturerhöhungen mindestens ebenso groß wie in den sonstigen Fällen; die Schallgeschwindigkeitsänderungen werden aber durch ganz andere Faktoren bedingt und sind hier umgekehrt Verminderungen, nicht Vermehrung.

Die Resultate der *Wechselfeldversuche* weisen wieder nur geringe Verkürzungen der Wellenlängen auf, dabei ließen sich wieder geringe Ozonmengen nachweisen.

Eine Reihe von fünf Versuchen ergab bei 30 bis 40 Minuten Einwirkung des Feldes eine durchschnittliche Verkürzung der Wellenlängen um 0,02 cm auf  $\lambda = 26,82$  cm.

Die *Radiumversuche*, die sich schon bei Luft als erfolglos herausgestellt hatten, wurden hier unterlassen.



## 3. Stickstoff.

Nach Beendigung der Luft- und Sauerstoffversuche stellte ich mir die Frage, ob auch Stickstoff bei Bestrahlungen dasselbe Verhalten zeigen würde, war doch hier bei der Einwirkung des ultravioletten Lichtes von vornherein mit keiner Bildung von höhermolekularen Stickstoffkomplexen wie beim Sauerstoff zu rechnen, da solche bei diesem Gase nicht bekannt sind.

Tatsächlich erfolgte auch hier eine Vergrößerung der Schallgeschwindigkeit in Bombenstickstoff bei Bestrahlung mit Ultraviolett.

Mit diesen Resultaten des Bombenstickstoffs glaubte ich mich jedoch noch nicht zufrieden geben zu dürfen, da das Bombengas bis zu 10 Proz. Verunreinigungen enthalten kann, vor allem Öldämpfe in größeren Mengen mit sich führt, die möglicherweise die beobachteten Werte beeinflußt haben konnten. Daher beschloß ich, da chemisch reiner Stickstoff in größeren Mengen nicht leicht herstellbar ist, das Bombengas von Sauerstoff und einem möglichst großen Teil der Öldämpfe zu befreien.

Zu dieser Reinigung leitete ich das Bombengas über ein mit Kupferwolle gefülltes glühendes Kupferrohr, sodann durch mehrere Waschflaschen mit konzentrierter Schwefelsäure und endlich durch eine Glasspirale, die in einem mit Äther-Kohlensäuregemisch gefüllten Dewarschen Gefäße ruhte. In dieser Spirale, die ein kleines, auswechselbares Wattefilter enthielt, verdichtete sich ein dickes, zähflüssiges Öl, ein Beweis also, daß wenigstens ein Teil der Öldämpfe hier zurückgehalten wurde. Die mit diesem sauerstofffreien Stickstoffgase angestellten Versuche lieferten mir die folgenden Resultate.

Tabelle IV.

Röntgenversuche.

Be- strahlungs- zeit	Halbe Wellenlängen im Versuchs- rohr cm	Kontroll- rohr cm	Zimmer- tem- peratur	Tem- peratur- erhöhung	Im Mittel
40 Min.	14,70	14,55	18,3°	2,6°	Starke Ver- größerung von $\lambda/2$ um 0,2 cm
30 „	14,18	13,90	20,2°	1,9°	
30 „	14,00	13,80	20,2°	1,8°	
30 „	14,26	14,07	17,5°	2,0°	

60°

Tabelle V.

Quecksilberlampe.

Be- strahlungs- zeit	Halbe Wellenlängen im Versuchs- rohr cm	Kontroll- rohr cm	Zimmer- tem- peratur	Tem- peratur- erhöhung	Im Mittel
30 Min.	14,70	14,55	20,0°	4,0°	<i>Ver- größerung von <math>\lambda/2</math> um 0,12 cm</i>
60 "	15,31	15,14	17,0°	4,1°	
30 "	14,32	14,20	19,2°	3,2°	
30 "	15,02	14,90	21,2°	3,6°	
90 "	15,25	15,10	20,3°	4,0°	
150 "	14,18	14,04	20,0°	4,9°	

Das *Wechselfeld* lieferte äußerst kleine Vergrößerungen von  $\lambda$ , die aber über die Fehlergrenzen nicht hinausgehen.

Die angestellten *Radiumversuche* ließen auch bei Stickstoff keinerlei Wellenlängenänderungen konstatieren, weder bei geschlossenem noch bei geöffnetem Präparat.

#### 4. Wasserstoffversuche.

Hatte ich bisher nur leicht ionisierbare Gase von großer Dichte untersucht, so schritt ich nunmehr dazu, Wasserstoff mit seiner geringen Dichte und kleinen Ionisierbarkeit zu untersuchen.

Das zur Untersuchung gelangende Gas war Elkanscher elektrolytischer Bombenwasserstoff, der laut Analyse insgesamt nur 0,2 Proz. Verunreinigungen besaß. Da diese geringen Spuren die Fehlergrenze meiner Versuche unmöglich erhöhen konnten, verwandte ich den Wasserstoff ohne vorherige Reinigung sofort zur Messung.

Die Einwirkungen der Bestrahlungsquellen verursachten im Vergleich zu den bisher behandelten Gasen sehr geringe Wellenlängenänderungen.

Während die ultravioletten Strahlen hier noch eine kleine Erhöhung des  $\alpha$ -Wertes hervorriefen, vermochte ich bei angelegtem *Wechselfeld* keine Änderungen der Wellenlängen zu konstatieren.

Tabelle VI.  
Röntgenbestrahlung.

Be- strahlungs- zeit	Halbe Wellenlängen im Versuchs- rohr cm	Kontroll- rohr cm	Zimmer- tem- peratur	Tem- peratur- erhöhung	Im Mittel
30 Min.	10,52	10,48	27,0°	1,2°	Geringe Zunahme von 1/2 um 0,06 cm
35 „	17,16	17,10	26,2°	1,0°	
30 „	14,26	14,20	25,6°	1,0°	
30 „	11,07	11,02	25,2°	1,0°	
Quecksilberlampe.					
30 Min.	16,74	16,69	25,1°	1,2°	Sehr geringe Zunahme von 1/2 um 0,04 cm
30 „	14,44	14,40	24,6°	1,1°	
30 „	16,34	16,30	28,3°	1,0°	
30 „	16,05	16,00	28,2°	1,0°	
35 „	16,24	16,18	27,4°	1,1°	

6. Zusammenstellung aller Versuchsergebnisse.

Zur bequemeren Übersicht über die gesamten Ergebnisse der angestellten Messungen der Änderung der Wellenlängen enthält Tab. VII die erforderlichen Daten. Sie enthält die

Tabelle VII.

	Luft	Sauer- stoff	Bomben- Stick- stoff	Gerein. Stick- stoff	Wasser- stoff
Röntgen- strahlen	sehr stark +	sehr stark +	stark +	stark +	gering +
Ultraviolettes Licht	stark +	stark -	gering +	gering +	sehr gering +
Wechselfeld	sehr gering -	sehr gering -	sehr gering +	sehr gering +	0
Becquerel- strahlen	0		0	0	0

Erhöhungen von  $\lambda$  als positive Zeichen, die Verkleinerungen als negative Zeichen; weiter bezeichnen die fünf Abstufungen „sehr stark“, „stark“, „gering“, „sehr gering“ und Null die entsprechenden Größen der Abweichungen.

#### 7. Leitfähigkeitsmessungen bestrahlter Gase.

Neben den Bestimmungen der Wellenlängen wurden, wie bereits eingangs erwähnt, solche der Leitfähigkeit ausgeführt.

Die zwischen zwei parallelen Platten befindliche abgeschlossene Gasmenge wurde wie bei den vorausgeschilderten Versuchen bestrahlt und sodann die Zeit bestimmt, innerhalb welcher die Spannungsdifferenz zwischen den beiden Platten von 3000 F auf 1000 F abgefallen war.

Die Messungen in trockener Luft und Stickstoff sind in der folgenden Tab. VIII zusammengestellt und der Übersicht halber in den letzten Spalten hinzugefügt die bei den Bestimmungen der Wellenlängen beobachteten Erhöhungen in Prozenten. Für die Vervollständigung dieser Versuche in einem Punkte sage ich Hrn. Dr. R. Ludwig meinen besten Dank.

Aus jenen Versuchen geht hervor, daß, im Vergleich mit dem Ionisationsvermögen des Röntgenrohres, das Wechselfeld und das geöffnete Radiumpräparat nur etwa 10mal schwächere, das geschlossene Radiumpräparat sogar nur 17mal schwächere Ionisation hervorzurufen vermochte, während die Quecksilberlampe eine mit jener kaum vergleichbare Ionisationsstärke hervorbrachte. Dies steht jedoch mit den gewonnenen Resultaten der Vergrößerung der Schallgeschwindigkeit quantitativ keineswegs im Einklang, am ehesten noch für die Quecksilberlampe.

Schon allein daraus geht unzweideutig hervor, daß die beobachteten Erscheinungen der Erhöhung des  $\lambda$ -Wertes infolge der Bestrahlungen mit Ionisationsquellen sicherlich nicht allein auf reiner Ionisation des Gases beruhen.

#### Erklärung der Resultate.

Bereits das Experiment lieferte durch die Größe der Leitfähigkeit des bestrahlten Gases gegenüber der beobachteten Änderung der Schallgeschwindigkeit den Nachweis, daß diese

Tabelle VIII.

Bestrahlungs- quelle	Luft			Stickstoff			Luft	Stickstoff
	La- dung	Zeit		La- dung	Zeit		Zunahme von $\lambda$	
		Min.	Sek.		Min.	Sek.		
—	+	40	—	+	41	—	—	—
	—	40	25	—	40	—		
Röntgenrohr	+	0	56,2	+	1	25,0	1,6 Proz.	1,5 Proz.
	—	0	57,2	—	1	37,5		
	—	0	56,0	+	1	25,0		
	+	0	56,2	—	1	35,0		
Mittel {	+	0	56,2	+	1	25,0		
	—	0	56,6	—	1	36,2		
Quecksilber- lampe	+	26	31,0	+	25	29,0	Infolge der Ozonbildung nicht zu erkennen	0,7 Proz.
	+	17	56,0	—	27	34,0		
	—	27	0,0	+	23	24,0		
	—	23	30,0					
Mittel {	+	22	13,5	+	24	26,5		
	—	25	15,0	—	27	34,0		
Wechselfeld	+	4	50,0	+	6	50,0	Wie vorstehend	$\approx$ Null
	+	5	33,0	—	11	20,0		
	+	5	22,0	+	6	10,0		
	—	9	0,0	—	11	23,0		
	—	16	0,0	+	7	19,0		
Mittel {	+	5	15,0	+	6	46,3		
	—	12	30,0	—	11	21,5		
Radium- präparat geschlossen	+	16	7,5	+	14	42,0	Null	Null
	—	16	8,0	—	14	55,0		
				+	15	28,0		
Mittel {	+			+	15	5,0		
	—			—	14	53,0		
Radium- präparat geöffnet	—	5	9,5	+	3	7,8	Null	Null
	+	4	54,0	+	3	10,6		
	+	5	10,0	—	3	17,2		
				—	3	17,8		
Mittel {	+	5	2,0	+	3	9,2		
	—	5	9,5	—	3	17,5		

Änderung nicht durch Ionisation allein erklärt werden kann. Dies läßt sich auch theoretisch bis ins Einzelne erklären; jedoch genügt es, für einen Ionisator die Betrachtung durchzuführen und für die anderen Bestrahlungsquellen den Unterschied festzustellen.

Den Vorgang der Ionisation eines Gases vermögen wir uns etwa in folgender Weise vorzustellen.

Nach dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz ist die kinetische Energie der Molekeln zu einem mittleren Bewegungszustand geregelt anzusehen, wobei jedoch einige Moleküle noch erheblich größere, andere langsamere Bewegungen ausführen. Treffen nun z. B. Röntgenstrahlen auf das Gas auf, so üben sie auf die elektrischen Atomladungen eine bedeutende beschleunigende Kraft aus, die so groß werden kann, daß die Molekeln z. T. auseinander gerissen werden können.<sup>1)</sup> Dies wird insbesondere der Fall sein bei denjenigen Partikeln, die infolge ihres augenblicklichen Bewegungszustandes gerade dem Zerfall am nächsten befindlich sind.

So gebildete Ionen können dann etwa durch einen weiteren Röntgenstoß noch derart beschleunigt werden, daß ihre kinetische Energie der zu weiterer Ionisation erforderlichen Energie gleichkommt. Prallen diese Ionen sodann gegen andere neutrale Molekeln, so führen sie durch ihren Anprall zu einer momentanen Zersprengung derselben (Ionisation durch Ionenstoß).

Bei dieser Einwirkung der Röntgenstrahlen läßt sich sofort ein Unterschied der Ionisationsstärke gegen den Einfluß anderer Ionisatoren, z. B. dem Wechselfelde oder den Wellen des ultravioletten Lichtes ersehen. Bei den ungeheuer schnellen Röntgenstößen vermag sich die intramolekulare Atomenergie nicht in Ausgleich zu setzen mit der progressiven Energie der Molekel.<sup>2)</sup> Die geringere Wechselzahl der stillen Entladungen ermöglicht schon einen teilweisen Ausgleich beider Energien, die rotatorische und oszillatorische Energie der Atome bleibt kleiner und erreicht nicht so häufig die Ionisationsgrenze. Die auf Resonanz beruhende Wirkung der ultravioletten Lichtwellen

1) J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen, p. 255.

2) Diese Ansicht sprach im Prinzip bereits früher F. Richarz an anderer Stelle aus; vgl. O. Rosenstock, Diss. Marburg p. 34. 1906.

endlich vermag wahrscheinlich, trotz großer Stärke in bezug auf ionisierende Kraft, an jene Stöße nicht heranzureichen.

Jene oben betrachtete Ionisation allein vermag jedoch die beträchtliche Vergrößerung der Schallgeschwindigkeit noch nicht zu erklären. Da im ganzen nur etwa  $\frac{1}{80}$  der Gesamtenergie der Strahlen zur Ionisation, d. h. zur vollständigen Sprengung der Gasmolekeln, verbraucht wird, ist selbst bei sehr großer Ionisation das Verhältnis der Zahl der freien Ionen zu der Zahl der Moleküle des Gases kleiner als  $1:10^{12}$ .<sup>1)</sup> Wenn dennoch *alle* Moleküle des Gases gleichmäßig der Strahlung ausgesetzt sind, so ist, da ja die durch Leitfähigkeitsmessung bestimmbare Ionisation auf einen außerordentlich kleinen Bruchteil aller Molekeln beschränkt ist, die Zahl derer, die ionisiert werden, notwendig in einem Zustande, der weit abliegt von dem Normalzustand der Molekeln. Zwischen diesen beiden Zuständen befinden sich zweifellos Zwischenstadien, in denen das Gefüge der Molekeln schon gelockert ist, aber bei der Bestimmung des Ionisationsgrades nicht mit gemessen werden kann.

Diese in ihrem molekularen Gefüge gelockerten Molekeln werden jedoch vielleicht schon eine Änderung der Schallgeschwindigkeit in dem Gase hervorrufen.<sup>2)</sup> Welche anderen Möglichkeiten für die Erklärung einer Erhöhung der Schallgeschwindigkeit noch in Betracht gezogen werden können, hat F. Richarz eingehend erörtert.<sup>3)</sup>

Endlich werden in dem ionisierten Gase wohl neben elektrisch geladenen Atomen auch elektrisch neutrale<sup>4)</sup> entstehen, wie sie für Chlor und Jod bereits nachgewiesen sind. Die neutralen Atome bleiben bei der Leitfähigkeit außer Betracht; sie tragen jedoch mit bei zur Erhöhung der Schallgeschwindigkeit und des  $\lambda$ -Wertes.

Das abweichende Verhalten des Wasserstoffes bei meinen Messungen beruht neben seiner geringen Dichte und daher geringen Absorption für Röntgenstrahlen, vielleicht auch zum

1) J. J. Thomson, l. c., p. 265 ff.

2) F. Richarz, Marb. Sitzungsber., August 1911. p. 111.

3) F. Richarz, Marb. Sitzungsber., 7. Mai 1913.

4) F. Richarz u. R. v. Helmholtz, Wied. Ann. 40. p. 190. 1890; R. Ludwig, Inaug.-Diss. Marburg 1913.



großen Teil auf seiner geringen Ionisierbarkeit, die im Verhältnis zu Luft gleich 1 gesetzt, nach J. J. Thomson<sup>1)</sup> gleich 0,33, nach Perrin<sup>2)</sup> nur 0,0026 beträgt. Die Ionisierbarkeit von Sauerstoff und Stickstoff ist nicht sehr verschieden von derjenigen der Luft, sie beträgt für Sauerstoff 1,2 und für Stickstoff 0,9. Fast die gleichen Verhältniszahlen bestehen zwischen meinen Resultaten der  $\lambda$  Erhöhungen, was auf einen engen Zusammenhang mit einer ionisationsähnlichen Erscheinung hindeutet. Zur Übersicht füge ich die folgende Tabelle bei.

Tabelle IX.

	Normales $\alpha$	Erhöhtes $\alpha$ bis	Differenz von $\alpha$	Ionisierbarkeit für Röntgenstrahlen
Luft	1,4048	1,439	0,034	1
O <sub>2</sub>	1,400	1,440	0,040	1,2
N <sub>2</sub>	1,41	1,441	0,031	0,9
H <sub>2</sub>	1,401	1,409	0,008	0,33 resp. 0,0026

Eine andere Möglichkeit des Einflusses auf die Schallgeschwindigkeit ist bereits auf p. 908 angedeutet. Außer der Größe  $\alpha$  könnte in der Formel

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{1}{\nu} \sqrt{\alpha \cdot \frac{p}{\mu}} \quad (\text{p. 907})$$

sich auch ändern  $p$  und  $\mu$ . Eine Änderung des Druckes  $p$  ist infolge der Art der Versuchsanordnung ausgeschlossen. Zugleich mit der Temperaturerhöhung tritt jedoch auch eine Änderung der Dichte des Gases ein, die jedoch nach den ausgeführten Temperaturmessungen (vgl. p. 915 und auch Bemerkung zu p. 918) allein bei weitem nicht ausreicht, um die Erhöhung der Schallgeschwindigkeit zu erklären. Sie bringt lediglich eine kleine, unvermeidliche Fehlerquelle in die Versuchsergebnisse hinein.

Die gegenüber den Röntgenstrahlen beobachtete schwächere Einwirkung des ultravioletten Lichtes beruht vermutlich auf

1) J. J. Thomson, Elektrischer Durchgang in Gasen, p. 256.

2) J. Perrin, Ann. de Chimie et de Physique (2) XI. p. 496. 1897.



dem Wesen der ultravioletten Strahlen. Im Gegensatz zu den außerordentlich starken Röntgeneinwirkungen beruht die Wirkung des aus Wellen verschiedener Länge bestehenden Ultraviolett nur auf Resonanz. Die beobachtete Verkleinerung der Schallgeschwindigkeit bei Luft und Sauerstoff erklärt sich durch die nachgewiesene Bildung von dreiatomigem Ozon.

Der nur geringe Einfluß des elektrischen Wechselfeldes und des Radiums auf die Schallgeschwindigkeit ist nicht verwunderlich, betrugen doch die Ionisations-Energiemengen nur einen geringen Bruchteil jener zur Bestrahlung verwandten Intensitäten.

Eine Prüfung des hier gegebenen Erklärungsversuches ergeben vielleicht die entsprechenden Untersuchungen an einatomigen Gasen, die im hiesigen Institut in Angriff genommen sind.

#### **Zusammenfassung der Resultate.**

Fassen wir nun zum Schluß die Resultate vorliegender Arbeit nochmals kurz zusammen, so sehen wir, daß eine Röntgenbestrahlung von Luft, Sauerstoff und Stickstoff eine beträchtliche Erhöhung der Schallgeschwindigkeit und daraus berechnet von  $\alpha$  dieser Gase bis zu 10 Proz. hervorrief, welche die des Wasserstoffs beträchtlich übertraf.

Die ultravioletten Strahlen der Quarzquecksilberlampe führten bei Sauerstoff und sauerstoffhaltigen Gasgemischen zur Bildung von Ozon und deshalb zu einer Verkleinerung der Schallgeschwindigkeit und Erniedrigung des  $\lambda$ -Wertes, erhöhten hingegen die Schallgeschwindigkeit bei Stickstoff und Wasserstoff, allerdings in geringerem Maße als die Röntgenstrahlen.

Ein Einfluß der Radiumstrahlen ließ sich nicht konstatieren, auch hielten sich die Änderungen, hervorgerufen durch das Wechselfeld, im allgemeinen innerhalb der Fehlergrenzen.

M. Trautz<sup>1)</sup> hat erheblich später als Rohlf, Küster und etwas später als die vorliegenden Ergebnisse einen dem vorliegenden ähnlichen Effekt bei Chlor gefunden, den er im

---

1) M. Trautz, Über den Budde-Effekt, Eders Jahrbuch der Phot. u. Reprodukt.-Technik I, p. 172ff. 1911; Zeitschr. f. Elektrochem. 18. p. 513—520 u. 657. 1912.

wesentlichen als durch Bestrahlung hervorgerufene Erniedrigung der spezifischen Wärme  $C_v$  erklärt. Weiterhin hebt M. Trautz noch verschiedene Unterschiede seiner Beobachtungen gegenüber den hier beschriebenen Messungen hervor, so daß nach seiner Ansicht die von ihm betrachteten Effekte etwas prinzipiell anderes bedeuten sollen. Ob sich diese Auffassung bestätigt, bleibt abzuwarten.

Marburg i. H., Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 31. Dezember 1913.)

**6. Zu Minkowskis Mechanik.  
Die Weltkonstante, die Systemmechanik;  
von B. Weinstein.**

---

1. Allmählich scheinen sich die Ansichten über das Relativitätsprinzip dahin zu klären, daß es in der ihm vom Entdecker gegebenen Form nicht vollständig erhalten bleiben kann. Zu den von anderen schon hervorgehobenen Schwierigkeiten mußte ich<sup>1)</sup> eine Reihe weiterer hinzufügen, die namentlich die Grundlagen betrafen und die aus ihnen erschlossene Mechanik. Selbstverständlich hat das auf die Größe des Gedankens selbst gar keinen Einfluß; Einsteins Einführung der Relativitätslehre wird immer zu den allerbedeutendsten Leistungen in der Wissenschaft zählen. Aber Einstein selbst hat neuerdings ein viel umfassenderes Gebäude für seine Lehre zu errichten begonnen. Ob er dabei über Minkowskis Lehre hinauskommt, läßt sich trotz der allgemeineren, nun von ihm angewendeten Beziehungen noch nicht sagen. Minkowskis Lehre muß man so anwenden, wie ihr Urheber sie gegeben hat. Unstimmigkeiten, die man aus ihr gefunden zu haben glaubte, lösen sich, sobald man in ihr von Näherungen und Vereinfachungen durchaus absieht, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe. Namentlich stellt Minkowskis Mechanik einen in sich gefesteten Bau dar, bei dem nur zu beklagen ist, daß ein hartes Schicksal dem genialen Manne nicht gestattete den inneren Ausbau noch zu bewirken. So müssen wir uns mit manchen Schwierigkeiten mühen, die er wohl leicht gelöst hätte. Aus seiner Mechanik folgt, daß die universelle Grundgröße in seiner Lehre in der Tat eine Konstante ist. Und wenn man diese Grundgröße mit der Lichtgeschwindigkeit im

---

<sup>1)</sup> In meinem Buche: Die Physik der bewegten Materie und die Relativitätstheorie. 1912.

freien Raum identifiziert, so folgt das gleiche für diese Lichtgeschwindigkeit. Ich habe im genannten Buche geglaubt das gegen die gegenteilige Ableitung Max Abrahams beweisen zu müssen, ich finde aber jetzt, daß diese Konstanz, wie ja vorauszusehen war, überhaupt schon in der Anlage der Minkowskischen Mechanik enthalten ist. Bezeichnet man nämlich die Raumzeitkoordinaten mit  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , ihre Variationen mit  $\delta x_i$ , usf., den Parameter, von dem diese Variationen abhängen sollen, mit  $\vartheta$  und nennt die auf die Eigenzeit  $\tau$  bezogenen Geschwindigkeiten (Eigengeschwindigkeiten, nach Minkowski „Bewegungsgrößen“)  $g_1, g_2, g_3, g_4$ , so stellt Minkowski als die in seiner Mechanik zu erfüllende Grundbedingung auf:

$$(1) \quad g_1 \left( \frac{\partial (\delta x_1)}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=0} + g_2 \left( \frac{\partial (\delta x_2)}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=0} + g_3 \left( \frac{\partial (\delta x_3)}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=0} + g_4 \left( \frac{\partial (\delta x_4)}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=0} = 0.$$

Er sagt dazu: „Für eine virtuelle Verrückung in der Sichel hatten wir noch die Forderung gestellt, daß die substantiell gedachten Punkte normal zu den aus ihnen hergestellten Kurven fortschreiten sollten.“ Normal aber sind nach seiner Theorie zwei Größen, wenn die Produkte ihrer entsprechenden Komponenten zusammen Null geben. Für die Eigengeschwindigkeiten  $g$  gilt nun die Grundgleichung

$$g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2 = -V^2,$$

wo  $V$  jene mit der Lichtgeschwindigkeit identifizierte Größe sein soll. Setzt man aber diese Größe als in der Eigenzeit konstant an, so wird

$$(2) \quad g_1 \frac{dg_1}{d\tau} + g_2 \frac{dg_2}{d\tau} + g_3 \frac{dg_3}{d\tau} + g_4 \frac{dg_4}{d\tau} = 0,$$

die bekannte Gleichung die Minkowski selbst feststellt und die dahin lautet, daß Bewegungsgröße und Beschleunigungsgröße normal zueinander sind. Man hat nur die Konstanz von  $V$  auf jede beliebige Größe auszudehnen, von der Veränderungen abhängen, um die bezeichnete Grundbedingung der Minkowskischen Mechanik zu erhalten, da für  $\vartheta = 0$ , d. h. für den Fall der wirklichen Bewegung, die  $\partial(\delta x)/\partial \vartheta$  den Beschleunigungsgrößen entsprechen.

Die Gleichsetzung von  $V$  mit der Lichtgeschwindigkeit folgt erst aus der Anwendung der Minkowskischen Lehre

auf die elektrodynamischen und optischen Erscheinungen. Sollte die Lichtgeschwindigkeit, wie Einstein jetzt nach seinem Äquivalenzprinzip will, doch als variabel sich herausstellen, so wird man eben zwischen ihr und der Minkowskischen Größe unterscheiden müssen, diese bliebe konstant. An sich bedeutet sie ja auch etwas anderes als die Lichtgeschwindigkeit, nämlich die imaginär gerechnete Gesamtgeschwindigkeit aller im Raume ruhenden oder irgendwie bewegten substantiell gedachten Weltpunkte in der Eigenzeit, die also von Minkowski als absolut konstant angesehen wird, so daß jeder substantiell gedachte Punkt auf der Weltlinie sich einzig und allein mit dieser imaginär gerechneten konstanten Geschwindigkeit bewegt, was ihre Bedeutung als Weltkonstante recht hervorhebt.

Ein weiteres Licht auf diese Größe wirft die Energiegleichung Minkowskis, die wir schreiben können

$$(3) \quad g_1 R_1 + g_2 R_2 + g_3 R_3 + g_4 R_4 = 0,$$

in der die  $R$  die Kraftkomponenten bedeuten. Da diese den Beschleunigungsgrößen proportional sind, so folgt, daß die Annahme der Konstanz der Größe  $V$ , also jener Weltgeschwindigkeit in der Eigenzeit, gleichbedeutend ist mit der Annahme des Energiegesetzes im Raumzeitgebiet. Dadurch gewinnt Minkowskis Theorie eine gefestete Unterlage. Und man sieht zugleich, daß an ihr in der Tat nichts fortgelassen werden darf, weil man dadurch den Energiesatz im Raumzeitgebiet verliert. Max Abrahams Vernachlässigungen greifen denn auch wirklich in diesen Energiesatz ein, wie ich an der genannten Stelle nachgewiesen habe.

2. Minkowskis Mechanik ist eine reine Punktmechanik, sie setzt demgemäß voraus, daß man die ganze Welt mit Hilfe von Vektoren und Tensoren in ein freies Punktsystem auflösen kann. Für ein nicht so auflösbares, gebundenes Punktsystem läßt sie sich nicht unmittelbar anwenden. Der Grund liegt zunächst in der Eigenzeit, die ja allgemein von Punkt zu Punkt variiert. Minkowski gibt seine vier Bewegungsgleichungen in der Form:

$$(4) \quad m \frac{d}{d\tau} \frac{dx_1}{d\tau} = R_1, \quad m \frac{d}{d\tau} \frac{dx_2}{d\tau} = R_2, \quad m \frac{d}{d\tau} \frac{dx_3}{d\tau} = R_3, \quad m \frac{d}{d\tau} \frac{dx_4}{d\tau} = R_4.$$

Nun spielt in diesen Gleichungen allerdings  $\tau$  die Rolle einer unabhängigen Variablen, wie aus mehreren Stellen von Minkowskis Abhandlungen erhellt. So stellt er den unter 2. angegebenen Hauptsatz seiner Theorie in seiner Schreibweise in der Form hin

$c^2 \ddot{t} \ddot{t} - \ddot{x} \ddot{x} - \ddot{y} \ddot{y} - \ddot{z} \ddot{z} = 0$ ;  $x = x_1, y = x_2, z = x_3, i V t = x_4, c = V$  und bezeichnet  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$  als die ersten,  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$  als die zweiten Differentialquotienten von  $x, y, z, t$  nach  $\tau$ . An anderer Stelle setzt er unmittelbar  $d^2 x / d\tau^2$  usf. für  $d(dx/d\tau)/d\tau$ . Und so darf man seine Bewegungsgleichungen in der Form auffassen:

$$(5) \quad m \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} = R_1, \quad m \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} = R_2, \quad m \frac{d^2 x_3}{d\tau^2} = R_3, \quad m \frac{d^2 x_4}{d\tau^2} = R_4$$

und so sind sie auch, glaube ich, bisher von allen aufgefaßt worden.<sup>1)</sup> Sie würden ja auch, da andere Variablen gar nicht vorhanden sind, sonst kaum mehr als symbolische Bedeutung haben. Für jeden Weltpunkt für sich ist also zwar  $\tau$  die unabhängige Variable, aber von Weltpunkt zu Weltpunkt wechselt diese Größe, eben als *Eigenzeit*. Das Verhalten entspricht vollständig dem der Kurvenlänge  $s$  in der analytischen Geometrie. Und es ist ja auch:

$$(6) \quad i V (\tau - \tau_0) = - \int \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}.$$

Will man Minkowskis Punktgleichungen für ein System von Punkten zu einer Einheit zusammenfassen, so hat man z. B. in  $\sum m d^2 x / d\tau^2$  zunächst lediglich eine symbolisch geschriebene Größe. Auch die Einführung von  $t$  statt  $\tau$  würde nicht fördern, da im Raumzeitsystem  $t$  lediglich die Rolle einer Koordinate spielt und ihre Benutzung als unabhängige Variable auf einer Weltkurve daran nichts ändert. Minkowskis Theorie enthält eben an sich keine Größe, die für alle Weltpunkte in demselben Sinne eine gleiche ist wie in der klassischen Mechanik die Zeit. Freilich kann man auch

1) Trotzdem scheint mir jetzt die Richtigkeit der von mir auf p. 360 und 361 unter (65) und (67) meines Buches auf Grund der obigen Anschauung über die Bedeutung von  $d(d/d\tau)/d\tau$  bei Minkowski gegebenen Gleichungen zweifelhaft. Diese Gleichungen passen auch nicht recht in Minkowskis Theorie, schon wegen der Zwitterstellung, die sie mit  $t$  und  $\tau$  einnehmen. An anderen Stellen ist von mir konsequent geschrieben.

in dieser Theorie unter gewissen Festsetzungen die Punkte eines Systems zu einer bestimmten Eigenzeit auffassen und so auch Summationen ausführen. Davon später. Im Wesen dieser Theorie aber liegt es eigentlich, daß alle Systeme lediglich als freie Punktansammlungen angesehen werden, und jeder Punkt für sich steht. Deshalb wohl hat Laue<sup>1)</sup> der letzten Entwicklung von Minkowskis Mechanik durch Born u. a. für „starre“ Systeme nicht zugestimmt. Indessen ist es doch nicht ohne Interesse die Rechnungen wenigstens so weit zu führen als gegenwärtig zulässig ist. Beispiele dafür sind schon vorhanden. Hier kommt die Übertragung von Lagranges Systemmechanik in Minkowskis Lehre in Betracht, wozu ich einige Entwicklungen für die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik vorausschicke.

3. Es seien  $q$  die unabhängigen Variablen des Systems,  $q = dq/dt$  die zugehörigen Geschwindigkeiten und  $p$  die Bewegungsmomente. Mit  $\Sigma$  wurde eine Summation über die Parameter, mit  $S$  eine solche über die Punkte des Systems bezeichnet.  $T_{qq'}$ ,  $T_{qp}$ ,  $T_{pq}$  sollen die lebendige Kraft des Systems darstellen in den drei bekannten Ausdrücken durch die Parameter und Geschwindigkeiten, Parameter und Bewegungsmomente, Bewegungsmomente und Geschwindigkeiten.

Aus der allgemeinen Beziehung

$$n T_{qq'} - n' T_{qp} - (n - n') T_{pq} = 0,$$

wo  $n$ ,  $n'$  beliebige Zahlen bedeuten, folgt dann:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum \left[ -\frac{\partial T_{qq'}}{\partial p} \delta p + \left( \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q'} - \frac{\partial T_{pq'}}{\partial q} \right) \delta q' + \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q} \delta q \right] &= 0, \\ \sum \left[ + \left( \frac{\partial T_{pq'}}{\partial p} - \frac{\partial T_{qp}}{\partial p} \right) \delta p + \frac{\partial T_{pq'}}{\partial q'} \delta q' - \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} \delta q \right] &= 0. \end{aligned} \right.$$

Stellt man die Bedingung auf, daß diese beiden Gleichungen nur einer Gleichung entsprechen sollen, so hat man

$$(8) \quad \frac{\partial T_{qp}}{\partial p} = 2 \frac{\partial T_{pq'}}{\partial p}, \quad \frac{\partial T_{qp}}{\partial q'} = 2 \frac{\partial T_{pq'}}{\partial q'}, \quad \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} = - \frac{\partial T_{pq}}{\partial q}.$$

Die letzte dieser drei Beziehungen ist die bekannte Hamiltonsche Gleichung, von der man auch ausgehen kann.

Man bekommt aber nunmehr acht Beziehungen zwischen

1) Relativitätstheorie.



den Variationen, die auch sonst bei vielen Gelegenheiten nützlich sind, nämlich:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \left( \frac{1}{2} \frac{\partial T_{qp}}{\partial p} \delta p - \frac{1}{2} \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q'} \delta q' - \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q} \delta q \right) = 0, \\ \sum \left( \frac{1}{2} \frac{\partial T_{qp}}{\partial p} \delta p - \frac{1}{2} \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q'} \delta q' + \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} \delta q \right) = 0, \\ \sum \left( \frac{\partial T_{pq'}}{\partial p} \delta p - \frac{\partial T_{pq'}}{\partial q'} \delta q' - \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q} \delta q \right) = 0, \\ \sum \left( \frac{\partial T_{pq'}}{\partial p} \delta p - \frac{\partial T_{pq'}}{\partial q'} \delta q' + \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} \delta q \right) = 0, \\ \sum \left( \frac{\partial T_{pq'}}{\partial p} \delta p - \frac{1}{2} \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q'} \delta q' - \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q} \delta q \right) = 0, \\ \sum \left( \frac{\partial T_{pq'}}{\partial p} \delta p - \frac{1}{2} \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q'} \delta q' + \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} \delta q \right) = 0, \\ \sum \left( \frac{1}{2} \frac{\partial T_{qp}}{\partial p} \delta p - \frac{\partial T_{pq'}}{\partial q'} \delta q' - \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q} \delta q \right) = 0, \\ \sum \left( \frac{1}{2} \frac{\partial T_{qp}}{\partial p} \delta p - \frac{\partial T_{pq'}}{\partial q'} \delta q' + \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} \delta q \right) = 0. \end{array} \right.$$

Vier von diesen Beziehungen habe ich bereits bei anderer Gelegenheit bekannt gemacht.<sup>1)</sup> In der klassischen Mechanik setzt man  $T_{pq'} = \frac{1}{2} \sum p q'$ . Es folgen dann aus (8) die üblichen Formeln

$$(10) \quad q' = \frac{\partial T_{qp}}{\partial p}, \quad p = \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q'},$$

und die acht obigen Beziehungen geben die zwei Gleichungen

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \left( q' \delta p - p \delta q' - 2 \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q} \delta q \right) = 0, \\ \sum \left( q' \delta q - p \delta q' + 2 \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} \delta q \right) = 0. \end{array} \right.$$

Mit Hilfe dieser und der früheren Gleichungen lassen sich die Variationen der lebendigen Kräfte mannigfach umwandeln, was an der genannten Stelle bereits benutzt ist, um für die Lagrangeschen Gleichungen neue Formen zu gewinnen.

Hier folge ich einem anderen Wege, um zu entscheiden, was für unseren Fall vorzusetzen ist. Wir haben

$$\delta T_{qq'} = \sum \left( \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q'} \delta q' + \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q} \delta q \right) = \sum \left( p \delta q' + \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} \delta q \right),$$

1) B. Weinstein, Wied. Ann. 15. p. 675. 1882.



also nach den Gleichungen (11)

$$(12) \quad \delta T_{q'q'} = \sum \left( q' \delta p - \frac{\partial T_{q'q'}}{\partial q} \delta q \right) = \sum \left( q' \delta p + \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} \delta q \right).$$

Nach den Lagrangeschen oder Hamiltonschen Gleichungen und dem Energieprinzip ist aber mit  $Q$  als Bezeichnung für die zum Parameter  $q$  gehörige Kraft

$$(13) \quad \sum Q \delta q = \sum \left( \frac{dp}{dt} - \frac{\partial T_{q'q'}}{\partial q} \right) \delta q = \sum \left( \frac{dp}{dt} + \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} \right) \delta q = \delta T_{q'q'}.$$

Also bekommen wir nach (12)

$$(14) \quad \sum q' \delta p = \sum \frac{dp}{dt} \delta q.$$

Wenn wir nun aus den Lagrangeschen Gleichungen selbst den Energiesatz ableiten wollen, so haben wir zunächst

$$\begin{aligned} \sum Q \delta q &= \sum \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{q'q'}}{\partial q'} \right) \delta q - \frac{\partial T_{q'q'}}{\partial q} \delta q \right) \\ &= \sum \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{q'q'}}{\partial q'} \delta q \right) - \frac{\partial T_{q'q'}}{\partial q'} \frac{d\delta q}{dt} - \frac{\partial T_{q'q'}}{\partial q} \delta q \right), \end{aligned}$$

und nach Vertauschung von  $d$  mit  $\delta$

$$\sum Q \delta q = \frac{d}{dt} \sum \left( \frac{\partial T_{q'q'}}{\partial q'} \delta q \right) - \delta T_{q'q'} = \frac{d}{dt} \sum p \delta q - \delta T_{q'q'}.$$

Soll nun für wirkliche Bewegungen die rechte Seite  $\delta T$  ergeben, so müssen wir haben

$$(15) \quad d \sum \left( \frac{\partial T_{q'q'}}{\partial q'} \delta q \right) = d \sum p \delta q = 2 d T dt,$$

und das ist nur möglich, wenn  $dt$  konstant,  $T = \sum p q' / 2$  und

$$(16) \quad \delta q = q' dt$$

angesetzt wird. Die Gleichung (14) gibt dann ferner

$$\sum q' \left( \delta p - \frac{dp}{dt} dt \right) = 0.$$

Nun sind die  $q'$  voneinander völlig unabhängig, weil man jeder dieser Größen irgendeinen Anfangswert zuschreiben kann. Man bekommt also weiter

$$(17) \quad \delta p = \frac{dp}{dt} dt.$$

Zuletzt ist noch, wenn  $q'$  als Funktion von  $q$  und  $p$  aufgefaßt wird, nach (16) und (17)

$$\delta q'_i = \sum_i \left( \frac{\partial q'_i}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial q'_i}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_i \left( \frac{\partial q'_i}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial q'_i}{\partial q_i} q'_i \right) dt,$$

und da

$$\sum_i \frac{\partial q'_i}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = \frac{dq'_i}{dt} - \sum_i \frac{\partial q'_i}{\partial q_i} q'_i$$

ist, so folgt

$$(18) \quad \delta q' = \frac{dq'}{dt} dt.$$

Diese Gleichungen (16), (17), (18) für die wirkliche Bewegung, die mit  $dt = \text{const}$  in der Regel wohl als selbstverständlich angenommen werden, in der Tat aber nicht vorausgesetzt werden dürfen, sind also eine Folge der Bewegungsgleichungen und des Energiesatzes. Stellt man sie für wirkliche Bewegungen von vornherein als zutreffend hin, so ergeben sich in Verbindung mit den Beziehungen (10) die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen aus dem Energiegesetz unmittelbar. So hat man

$$\begin{aligned} \sum Q \delta q &= \sum \delta T_{q q'} = \sum \left( \frac{\partial T_{q q'}}{\partial q'} \delta q' + \frac{\partial T_{q q'}}{\partial q} \delta q \right) \\ &= \sum \left( \frac{\partial T_{q p}}{\partial p} \delta p - \frac{\partial T_{q q'}}{\partial q} \delta q \right), \end{aligned}$$

letzteres nach (9), und weiter für die wirkliche Bewegung nach (16) und (17)

$$\sum Q q' dt = \sum \left( q' \frac{dp}{dt} - \frac{\partial T_{q q'}}{\partial q} q' \right) dt,$$

das heißt:

$$\sum \left( Q - \frac{dp}{dt} + \frac{\partial T_{q q'}}{\partial q} \right) q' = 0,$$

woraus wegen der Unabhängigkeit der  $q'$  voneinander die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen folgen, und mit Hilfe der Gleichungen (8) die Hamiltonschen sowie die von mir an genannter Stelle angegebenen Formen dieser Gleichungen, ferner noch andere Formen, die aus den Beziehungen (9) leicht entnommen werden können und nicht entwickelt zu werden brauchen. Im übrigen gehen für wirkliche Bewegung die Variationsgleichungen (11) in die bestimmten Gleichungen über:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} & \sum \left( q' \frac{dp}{dt} - p \frac{dq'}{dt} - 2 \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q} q' \right) \\ & \qquad \qquad \qquad = \sum q'^2 \left( \frac{d}{dt} \frac{p}{q'} - \frac{2}{q'} \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q} \right) = 0, \\ & \sum \left( q' \frac{dp}{dt} - p \frac{dq'}{dt} + 2 \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} q' \right) \\ & \qquad \qquad \qquad = \sum q'^2 \left( \frac{d}{dt} \frac{p}{q'} + \frac{2}{q'} \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} \right) = 0, \end{aligned} \right.$$

die man selbstverständlich nicht in die Summanden zerlegen darf. Diese sehr nützlichen Kontrollgleichungen sind ein Kriterium für die Zulässigkeit der Annahmen. Unter anderem lehren sie, daß, wenn die  $p/q'$  konstant, die Bewegungsmomente also den Geschwindigkeiten konstant proportional sein sollen, die kinetische Energie notwendig von den Parametern unabhängig sein muß. Das Umgekehrte braucht nicht stattzufinden, denn besteht diese Unabhängigkeit, so ist lediglich  $\sum (q' dp - p dq') = 0$ .

Weiter bekommen wir, gewissermaßen als Bewegungsgleichungen für die Gesamtheit der Parameter:

$$(20) \left\{ \begin{aligned} \sum Q q' &= \frac{1}{2} \sum \frac{d}{dt} (p q'), \\ \sum Q q' &= \sum \left( p \frac{dq'}{dt} + \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q} q' \right) \\ &= \sum \left[ \frac{d(p q')}{dt} + q' \left( \frac{\partial T_{qq'}}{\partial q} - \frac{dp}{dt} \right) \right], \\ \sum Q q' &= \sum \left( p \frac{dq'}{dt} - \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} q' \right) \\ &= \sum \left[ \frac{d(p q')}{dt} - q' \left( \frac{\partial T_{qp}}{\partial q} + \frac{dp}{dt} \right) \right], \end{aligned} \right.$$

die auch als Leistungsgleichungen bezeichnet werden können.

4. Alle diese Betrachtungen, sowie die von Lagrange selbst durchgeführten können wir unmittelbar auf Minkowskis Theorie übertragen. Lagrange hat seine Bewegungsgleichungen durch Transformation der invarianten Systemgleichung

$$\oint \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \oint (R_1 \delta x + R_2 \delta y + R_3 \delta z)$$

gewonnen. In Minkowskis Theorie entspricht ihr die gleichfalls invariante Gleichung

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} & S \frac{d^2 x_1 \delta x_1 + d^2 x_2 \delta x_2 + d^2 x_3 \delta x_3 + d^2 x_4 \delta x_4}{d\tau^2} \\ & = S (R_1 \delta x_1 + R_2 \delta x_2 + R_3 \delta x_3 + R_4 \delta x_4), \end{aligned} \right.$$

die freilich nur so geschrieben werden darf, wenn die obige Angabe über  $dd\tau$  zutrifft, was für diese Angabe spricht.

Man bekommt dann, Lagranges Verfahren folgend,

$$(22) \quad S Q' = S \frac{1}{d\tau^2} \left( d \frac{\partial \Theta'}{\partial dq} - \frac{\partial \Theta'}{\partial q} \right),$$

wo  $Q'$  die Kraft zu  $q$  für den betreffenden Punkt und

$$\Theta' = \frac{m}{2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2),$$

ausgedrückt in  $q$  und  $dq$  ist. Indem man in jedem Gliede der Systemsummen  $\tau$  als unabhängige Variable benutzt, kann man der üblichen Form der Lagrangeschen Gleichungen sich mehr anschließend schreiben

$$(23) \quad S Q' = S \left( \frac{d}{d\tau} \frac{\partial T'_{qq'}}{\partial q'} - \frac{\partial T'_{qq'}}{\partial q} \right), \quad q' = \frac{dq}{d\tau},$$

wo also

$$T'_{qq'} = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dx_1}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dx_2}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dx_3}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dx_4}{d\tau} \right)^2 \right]$$

die kinetische Energie jedes Weltpunktes im Raumzeitgebiet bedeutet und in  $q, q'$  auszudrücken ist. Haben wir nur einen Weltpunkt, so können die obigen Gleichungen dazu dienen, Minkowskis Gleichungen in andere Koordinaten zu transformieren, z. B. in die Raumzeit-sphärischen Koordinaten

$$x_1 = r \sin f \cos \varphi \sin \vartheta, \quad x_2 = r \cos f \cos \varphi \sin \vartheta,$$

$$x_3 = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad x_4 = r \cos \vartheta,$$

welche umgekehrt ergaben

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2; \quad \operatorname{tg} f = \frac{x_1}{x_2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{x_4} = \sqrt{\frac{r^2}{x_4^2} - 1}.$$

Man findet leicht

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = dr^2 + r^2 (\sin^2 \vartheta (\cos^2 \varphi df^2 + d\varphi^2) + d\vartheta^2),$$

und damit als Bewegungsgleichungen<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{m} Q_r = \frac{d^2 r}{d\tau^2} - r \left[ \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta \left( \frac{df}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \vartheta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{d\vartheta}{d\tau} \right)^2 \right],$$

$$\frac{1}{m} Q_f = - \frac{d}{d\tau} \left( r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta \frac{df}{d\tau} \right),$$

$$\frac{1}{m} Q_\varphi = \frac{d}{d\tau} \left( r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{d\tau} \right) + r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \vartheta \left( \frac{df}{d\tau} \right)^2,$$

$$\frac{1}{m} Q_\vartheta = \frac{d}{d\tau} \left( r^2 \frac{d\vartheta}{d\tau} \right) - r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \left[ \cos^2 \varphi \left( \frac{df}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right].$$

$Q_r$  ist die zu  $r$  gehörige Kraft,  $Q_f$ ,  $Q_\varphi$ ,  $Q_\vartheta$  bezeichnen Drehungsmomente zu den Winkeln  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta$ , alles im Raumzeitgebiet. Für  $\vartheta = 90^\circ$  findet man die entsprechenden Gleichungen für das Raumgebiet in Lagranges Mécanique analytique. Die vielen Umwandlungen, die man an den obigen Gleichungen vornehmen kann und die aus ihnen folgenden nicht uninteressanten Schlüsse auf die geometrischen Gebilde im Raumzeitgebiet, muß ich hier übergehen. Bei Systemen von Punkten ist die Form (22) zum Ausgang zu wählen. Beachtet man, daß

$$d\tau^2 = - \frac{2}{m V^2} \Theta'$$

ist, so wird auch

$$(24) \quad S Q' = - V^2 S \frac{m}{2} \frac{1}{\Theta'} \left( d \frac{\partial \Theta'}{\partial d q} - \frac{\partial \Theta'}{\partial q} \right).$$

Diese Gleichung zeigt auf das deutlichste wie, trotz aller Ähnlichkeit in der Form, verschieden Minkowskis Mechanik von der klassischen Mechanik ist. Mathematisch gesprochen: man hat in Minkowskis Mechanik für Systeme keine allgemein unabhängige Variable, die sich in der klassischen Mechanik in der Zeit  $t$  bietet.

Den Energiesatz müssen wir hier ausdrücken durch:

$$(25) \quad S \sum Q' \delta q = S \delta T'.$$

Wir bekommen dann wie früher

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} S \sum Q' \delta q &= S \sum \left( \frac{\partial T'_{qp}}{\partial p} \delta p - \frac{\partial T'_{qq}}{\partial q} \delta q \right) \\ &= S \sum \left( q' \delta p - \frac{\partial T'_{qq}}{\partial q} \delta q \right). \end{aligned} \right.$$

1) Ich habe früher gemeint, daß das sogenannte „Galileische Relativitätsprinzip“ wenigstens mit Bezug auf die Bewegungsmomente allgemein gilt. Das Beispiel zeigt, daß das nicht zutrifft, was mir inzwischen schon aus anderen Gründen klar geworden war.

Lassen wir die Beziehungen (16) bis (18) auch hier gelten mit  $d\tau$  für  $dt$ , so erstrecken sie sich nicht auf das ganze System, sondern auf jeden Punkt für sich, und wir haben

$$\sum Q' q' d\tau = \sum \left( \frac{dp}{d\tau} - \frac{\partial T'_{qq'}}{\partial q} \right) q' d\tau,$$

oder

$$\sum Q' d\tau \left( Q' - \frac{dp}{d\tau} + \frac{\partial T'_{qq'}}{\partial q} \right) = 0.$$

Die Größen  $q' d\tau = dq$  sind aber für alle Systempunkte die gleichen, wir gelangen also auch hier vom Energiesatz zu den Lagrangeschen Gleichungen in der Form (23). Ob die gemachten Annahmen zulässig sind, ist an den Gleichungen (19) jedesmal zu prüfen. In dem behandelten Beispiel der Transformation der Minkowskischen Punktgleichungen auf vierdimensionale sphärische Koordinaten überzeugt man sich durch einfache, wenn auch längere Nachrechnung, daß diese Kontrollgleichungen in der Tat identisch erfüllt sind. Wir hätten also zu Minkowskis Gleichungen mit den angegebenen Annahmen auch aus dem Energiesatz im Raumzeitgebiet gelangen können, und zwar beliebig für geradlinige wie für sphärische vierdimensionale oder sonstige Koordinaten. Minkowskis Ableitung seiner Gleichungen ist sehr schwer zu durchdringen. Für das was er „Spannungswirkung“ nennt haben wir, wie ich zeigen konnte, eine Analogie in der Spannungsarbeit der klassischen Mechanik. Aber die Größe, die er als „Massenwirkung“ bezeichnet, die zusammen mit der Spannungswirkung, die im zweiten Ausdruck des Hamiltonschen Prinzips der klassischen Mechanik allein steht, einem Minimum zugeführt wird, kann man nur ahnend mit entsprechenden Größen der klassischen Mechanik zusammenstellen. Darum ist es vielleicht nicht ohne Vorteil, einen einfacheren Weg zu kennen, der zu Minkowskis Gleichungen wenigstens der Form nach führt.<sup>1)</sup> Die Bedingung (1) ist dadurch

1) Wisniewski hat gleichfalls aus einem von ihm aufgestellten Prinzip Minkowskis Gleichungen abgeleitet (Ann. d. Phys. 40. p. 673. 1913). Aber ich halte diese Ableitung nicht für zulässig. Und das Prinzip ist im Grunde kein anderes als das Minkowskische, da das von ihm in das Hamiltonsche Prinzip eingefügte Glied, Minkowskis „Massenwirkung“ darstellt.

umgangen, daß für die Eigenzeit  $d\tau$  die aus ihr fließende Definition festgesetzt ist. Aber eines — und es ist gerade das schönste in Minkowskis Lehre — geht bei dieser Art der Ableitung verloren, die Erklärung der Kräfte durch Spannungen und die Art dieser Erklärung. Ich habe keinen Weg gefunden mit Hilfe irgend eines Verfahrens der klassischen Mechanik zu dieser Erklärung zu gelangen. Man muß zu Maxwells Gastheorie greifen um ähnliches zu erhalten, stößt aber dabei auf eigenartige Schwierigkeiten, die ich in meiner Thermodynamik schon berührt habe, über die ich in einer anderen Arbeit sprechen werde, in der es sich um die Darstellung der Kräfte durch Spannungswirkungen überhaupt handeln soll. Indessen bleibt ja der Ausweg, Minkowskis Darstellung der Kräfte einfach hinzunehmen und diese Darstellung in die Transformationen, sei es nur für besondere Koordinaten, sei es um Gleichungen für Systeme zu gewinnen, einzubegreifen. Das ist formal, es ist aber leider in Minkowskis Mechanik noch fast alles formal, und es wird wohl noch so lange das meiste formal bleiben, bis wir gelernt haben die Spannungen so zu ermitteln, daß sie den Erfahrungen über die betreffenden Kräfte entsprechen. Minkowski hat nur ein Beispiel für die Ansetzung der Kräfte im Raumzeitgebiet gegeben, aber, ohne auf die Definition durch die Spannungen einzugehen, und in so schwieriger Darstellung, daß man ihm kaum zu folgen vermag. Ich glaube das Wichtigste wird zunächst sein für Minkowskis Mechanik Beispiele zu rechnen, soviel Entsagung dieses auch verlangt, wie das ja schon zum Teil geschehen ist.

5. Die Gleichungen gelten unverändert auch wenn man sich auf den Raum beschränkt, vorausgesetzt, daß dieser als Normalschnitt zu den Weltlinien gewählt wird und selbstverständlich soweit die Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  sich durch die Parameter  $q$  ausdrücken lassen. In der Tat hat man aus Minkowskis Gleichungen

$$(27) \quad (g_1 R_1 + g_2 R_2 + g_3 R_3 + g_4 R_4) = - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{m}{2} V^2 \right),$$

und da

$$g_4 = dx_4/d\tau = i V dt/d\tau, \quad R_4 = m d^2 x_4/d\tau^2 = i V m d^2 t/d\tau^2$$

ist, so wird

$$(28) \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{m}{2} V^2 \left[ \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - 1 \right] \right) d\tau = (g_1 R_1 + g_2 R_2 + g_3 R_3) d\tau,$$

also

$$(29) \quad d \left( \frac{m}{2} (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) \right) = R_1 dx_1 + R_2 dx_2 + R_3 dx_3,$$

was den Energiesatz in diesem Normalraum, Ruhraum, ergibt. Anders verhält es sich, wenn der Raum den Schnitt senkrecht zur  $t$ -Achse bilden soll, also für den klassischen Raum. Die Kräfte sind dann nicht  $R$ , sondern  $R d\tau/dt$ , weil sie vom Ruhraum auf diesen klassischen Raum umzurechnen sind. Setzt man  $R d\tau/dt = R'$ , so folgt

$$(30) \quad \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} V^2 \left[ \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - 1 \right] \right) = g_1 R_1' + g_2 R_2' + g_3 R_3'; \quad g = g \frac{d\tau}{dt}$$

aus der sich durch Integration die bekannte Einstein-Minkowskische Form des Energiesatzes für den klassischen Raum ergibt. Die kinetische Energie ist

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} T' &= \int \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} V^2 \left[ \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - 1 \right] \right) dt \\ &= \frac{m}{2} \int \sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{g^2}{1 - \frac{g^2}{V^2}} \right) dt, \end{aligned} \right.$$

nach Integration unter der Bedingung, daß  $T' = 0$  sein soll für  $g = 0$ , eben der Einstein-Minkowskische Ausdruck. Minkowski selbst hat die beiden Räume stillschweigend unterschieden. So gibt er als Gleichungen für die Bewegung nach der Newtonschen Gravitation

$$\frac{d^2 x_n}{d\tau^2} = - \frac{m^* x_n}{(t - \tau^*)^3}; \quad n = 1, 2, 3$$

und erklärt  $t - \tau^*$  durch

$$(t - \tau^*)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

wo  $m^*$  die Ruhmasse des anziehenden Zentrums bedeutet. Die Gleichungen wären hiernach im Normalraum, mit der Eigenzeit dieselben der Form nach wie die in der klassischen Mechanik im klassischen Raum. Wisniewski<sup>1)</sup> setzt, statt der obigen Minkowskischen Gleichungen:

1) F. J. de Wisniewski, Ann. d. Phys. 40. p. 387 u. 668. 1913.



$$\frac{d^2 x_\alpha}{d\tau^2} = - \frac{m^* x_\alpha}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \frac{dt}{d\tau}; \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

In welchem Raume diese Gleichungen gelten sollen, ist nicht gesagt, da aber nach Eigenzeit gerechnet wird, soll es sich wohl um den Normalschnitt zur Weltlinie handeln. Dann wäre Wisniewskis Ansatz für die Newtonsche Gravitationskraft in diesem Raum verschieden von Minkowskis um den Faktor  $dt/d\tau$ . Dieser Faktor ist aus folgendem Anlaß gewählt. Schreibt man den Energiesatz  $dT' = d\Pi$  und läßt  $\Pi$  eine Funktion nur von  $x_1, x_2, x_3$  sein, so wird

$$dT' = \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} dx_3.$$

Wisniewski benutzt nun die Einstein-Minkowskische Form des Energiesatzes und meint, daß hiernach  $R_* d\tau/dt = \partial \Pi / \partial x_\alpha$ , also  $R_* = (\partial \Pi / \partial x_\alpha)(dt/d\tau)$  sein müsse. Ich glaube nicht, daß dieser Ansatz zulässig ist, weil jene Form sich auf den klassischen Raum, senkrecht zur  $t$ -Achse, bezieht,<sup>1)</sup> die Bewegungsgleichungen aber für den Normalraum senkrecht zur  $\tau$ -Linie angesetzt sind. Trifft Minkowskis Annahme, daß die Gravitation in diesem Ruhraume demselben Gesetz gehorcht, das Newton für den klassischen Raum angegeben hat, zu, so müste man nun für den klassischen Raum dieses Gravitationsgesetz mit  $d\tau/dt$  multiplizieren. Die Bewegungsgleichungen würden dann in diesem klassischen Raum lauten:

$$(32) \quad m \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}} \frac{dx_\alpha}{dt} \right) = R_* \sqrt{1 - \frac{g^2}{V^2}}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Daß dadurch dem Einstein-Minkowskischen Energiesatz genügt wird, überzeugt man sich leicht. Wisniewskis Ansatz beruht auf einer Vermischung zweier Systeme.

6. Wir kehren zu den allgemeinen Systemgleichungen (23) usw. zurück. Im Raumzeitgebiet haben die Weltlinien keinen Anfang, wie ihnen auch kein Ende zukommt, wenn man nicht eine Schöpfung und eine Vernichtung der Welt annehmen will. Wir können aber die Längen von einem Querschnitt senkrecht zur  $t$ -Achse rechnen, für den  $g_1 = g_2 = g_3 = 0$  ist,  $g_4$  hat nun

1) Laue scheint der gleichen Ansicht zu sein.

einen bestimmten Wert. Legen wir dann durch die Weltlinien des Systems Raumschnitte, von denen jeder Schnitt alle Weltlinien zu derselben Eigenzeit schneidet, so liegen zwischen zwei solchen Schnitten gleiche Strecken der Weltlinien. Wollen wir nun  $d\tau$  als für das ganze System gleich ansetzen, so muß zunächst die Bedingung erfüllt sein, daß alle  $d\tau$  des Systems sich in stets gleicher Weise, entlang aller Weltlinien, durch ein  $d\tau$  messen lassen. Da es sich um ein System handelt, so wird bei der obigen Feststellung über die Ausgangsrechnung für die  $\tau$  die Gesamtheit aller  $d\tau$  auf allen Weltlinien zu einer bestimmten Zeit  $\tau$  sein:

$$d\tau, 2d\tau + d^2\tau, 3d\tau + 3d^2\tau + d^3\tau, 4d\tau + 6d^2\tau + 4d^3\tau + d^4\tau \text{ usw.}$$

Diese Größen sollen also mit  $\tau$  nicht variieren, und so werden wir *ein*  $d\tau$  für das ganze System gelten lassen dürfen, wenn dieses System so geartet ist, daß die Variationen jener Werte Null sind. Daraus folgt, daß das System der Bedingung unterliegt:

$$(33) \quad \delta(d^n\tau) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Nach einer Analyse von Lagrange, die hier nur auf vier Dimensionen zu erweitern ist, sind hiernach die Bedingungen zu erfüllen:

$$(34) \quad d^n x_1 d^n(\delta x_1) + d^n x_2 d^n(\delta x_2) + d^n x_3 d^n(\delta x_3) + d^n x_4 d^n(\delta x_4) = 0, \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

In der klassischen Mechanik mit drei Koordinaten stehen solche Bedingungen für starre Systeme. Nun ist freilich für die klassische Mechanik  $d\tau = dt$  zu setzen. Aber da  $\delta(dt)$  in der klassischen Mechanik absolut Null ist, so hat man  $\delta(d\tau^2) = -\delta(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)/V^2$ , so daß (33), (34) auch für den Übergang zur klassischen Mechanik gelten. Die Vergleichung mit den Beziehungen dieser Mechanik für starre Systeme ist hiernach eine sachliche. Wir könnten deshalb Systeme, die im Raumzeitgebiet den Bedingungen (33) oder (34) genügen, als „starr“ bezeichnen. Um sie jedoch von den bald zu handelnden Bornschen starren Systemen zu unterscheiden, nennen wir sie „eigenstarr“. Übrigens besagen die Beziehungen (34), daß in einem solchen Systeme jede irgendwie durch seine Punkte gelegte Weltkurve, mögen wir ihr welche

Reihe auch der Eigenzeiten zuschreiben, sich weder in sich zusammenzieht oder dehnt, noch durch ihre Krümmung nach irgendeiner Seite ändert.

Es genügt die Gleichungen (34) für  $n = 1, 2, 3, 4$  zu integrieren. Nimmt man  $x_1$  zur unabhängigen Variablen, daß  $d^2 x_1 = 0$  wird, so führt Lagranges Interpretationsweise für die Gleichungen bei  $n = 2, 3, 4$  zu

$$d\delta x_2 = dx_1 \delta P - dx_3 \delta N + \delta x_4 \delta M,$$

$$d\delta x_3 = dx_1 \delta Q + dx_2 \delta N - dx_4 \delta L,$$

$$d\delta x_4 = dx_1 \delta R - dx_2 \delta M + dx_3 \delta L,$$

wo  $\delta P$  usf. von den Koordinaten nicht abhängen. Aus der ersten Gleichung ergibt sich dann  $dx_1 d\delta x_1 = -(\delta P dx_2 + \delta Q dx_3 + \delta R dx_4) dx_1$ . Indem man dieses integriert und die noch fehlende Integration bei den drei anderen Gleichungen nachholt, erhält man

$$(35) \quad \begin{cases} \delta x_1 = \delta A_1 - x_2 \delta P - x_3 \delta Q - x_4 \delta R, \\ \delta x_2 = \delta A_2 + x_1 \delta P - x_3 \delta N + x_4 \delta M, \\ \delta x_3 = \delta A_3 + x_1 \delta Q + x_2 \delta N - x_4 \delta L, \\ \delta x_4 = \delta A_4 + x_1 \delta R - x_2 \delta M + x_3 \delta L, \end{cases}$$

wie zu erwarten war. Da wir diese Gleichungen auch auf jede Weltlinie anwenden dürfen, wo  $\delta x = g d\tau$  ist, so können wir allgemein schreiben

$$(36) \quad \delta x_\kappa = g_\kappa d\tau = (a_\kappa + \sum_i a_{\kappa i} x_i) d\tau; \quad \kappa, i = 1, 2, 3, 4$$

mit

$$(37) \quad a_{\kappa\kappa} = a_{i i} = 0, \quad a_{k i} = -a_{i k}.$$

Es folgt aus diesen Gleichungen

$$(38) \quad \frac{\partial g_\kappa}{\partial x_i} + \frac{\partial g_i}{\partial x_\kappa} = 0; \quad \kappa, i = 1, 2, 3, 4.$$

Die vier ersten dieser zehn Beziehungen, mit  $\kappa = i$ , die Dilatationsgleichungen, stellen fest, daß nach keiner Weltrichtung eine Dilatation stattfindet, sie geben addiert

$$(39) \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} + \frac{\partial g_4}{\partial x_4} = 0,$$

so daß das System im Raumzeitgebiet inkompressibel ist. Die sechs anderen Beziehungen, mit  $\kappa \neq i$  bedeuten die entgegen-

gesetzte Gleichheit korrespondierender Rotationen; um mich kurz auszudrücken, sie sind die Rotationsgleichungen. Alles entspricht völlig den Verhältnissen bei starren Systemen in der klassischen Mechanik. Die Eigenart der Minkowskischen Mechanik bringt es, wie wir später sehen werden, mit sich, daß diese zehn Gleichungen nur sieben voneinander unabhängige Beziehungen ergeben, und da man hierfür die sechs Rotationsgleichungen und die Inkompressibilitätsgleichung wählen kann, so folgt schon, daß in der Behandlung besonderer Probleme doch ein sehr erheblicher Unterschied gegen die klassische Mechanik vorhanden sein muß, wo von den Dilatationsgleichungen nur eine gespart werden kann. Diese Behandlung ist für spätere Gelegenheit vorbehalten. Hier wende ich mich zu den von anderen für starre Systeme gegebenen Theorien.

7. Es ist das große Verdienst Borns eine relativistische Mechanik der Systeme begründet zu haben.<sup>1)</sup> Ihm sind dann Herglotz,<sup>2)</sup> Nöther,<sup>3)</sup> von Ignatowski<sup>4)</sup> u. a. umdeutend, ausführend und erweiternd gefolgt. Born nennt Systeme starr, wenn der Normalabstand zweier Weltlinien von der Eigenzeit an der betreffenden Stelle unabhängig ist. Herglotz zeigt, daß das damit gleichbedeutend sei, daß zwei Weltlinien überall den gleichen Abstand haben. Die Rechnungen beider Forscher sind nur äußerlich dem Minkowskischen System angepaßt und bewegen sich mehr im Sinne der älteren Relativitätslehre. Sie bemerken, daß, wenn  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  Ausgangswerte für  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sind, man zunächst

$$x = x(\xi, \eta, \zeta, t), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta, t), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta, t)$$

habe, also wie in der klassischen Mechanik. Nun wird eine „Eigenzeit“  $\tau$  eingeführt durch  $t = t(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ , dann sei symmetrischer

$$(40) \quad \begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta, \tau), & y = y(\xi, \eta, \zeta, \tau), & z = z(\xi, \eta, \zeta, \tau), \\ t = t(\xi, \eta, \zeta, \tau). \end{cases}$$

1) M. Born, Ann. d. Phys. 30, p. 1. 1909.

2) G. Herglotz, Ann. d. Phys. 31, p. 393. 1910.

3) F. Nöther, Ann. d. Phys. 31, p. 919. 1910.

4) W. v. Ignatowski, Ann. d. Phys. 33, p. 607. 1910 u. 34, p. 373. 1911.

Auch hier ist noch keine Abweichung von der klassischen Mechanik.  $\tau$  wird dann nach Minkowski definiert. Minkowskis Mechanik macht jede Koordinate außer von der Eigenzeit von vier, statt von drei, Ausgangswerten abhängig. Wir haben also allgemein

$$(41) \quad x_n = x_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \tau); \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Es zeigt sich nun, daß Borns Ergebnisse sich viel einfacher und übersichtlicher gestalten, wenn man die Berechnungen vollständig der Lehre Minkowskis anpaßt.  $x_n, \xi_n$  seien zwei Punkte gleicher Eigenzeit  $\tau$  auf zwei benachbarten Weltlinien  $\xi_n + \Delta \xi_n$  und  $\xi_n$ , die mit II und I bezeichnet werden sollen,  $\xi_n'$  sei der auf I dem Punkte  $x_n$  auf II normal gegenüberliegende Punkt.

Die Eigenzeitdifferenz zwischen  $x_n$  und  $\xi_n$ , die Zeitdifferenz der beiden Weltlinien, sei  $\Delta \tau$ , sie ist auch gleich der Zeitdifferenz zwischen  $\xi_n$  und  $\xi_n'$ . Wir folgen nun zunächst dem Verfahren Borns mit der angegebenen Änderung. Es ist

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_n = \xi_n + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \Delta \xi_1 + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} \Delta \xi_2 + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_3} \Delta \xi_3 + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_4} \Delta \xi_4 \\ x_n = \xi_n' + \frac{\partial \xi_n'}{\partial \tau} \Delta \tau + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \Delta \xi_1 + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} \Delta \xi_2 + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_3} \Delta \xi_3 + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_4} \Delta \xi_4 \end{array} \right\} \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

$$(x_1 - \xi_1')(\xi_1 - \xi_1') + (x_2 - \xi_2')(\xi_2 - \xi_2') + (x_3 - \xi_3')(\xi_3 - \xi_3') + (x_4 - \xi_4')(\xi_4 - \xi_4') = 0,$$

letztere Gleichung ist die Normalitätsbedingung. Setzen wir

$$(43) \quad \epsilon^2 = (x_1 - \xi_1')^2 + (x_2 - \xi_2')^2 + (x_3 - \xi_3')^2 + (x_4 - \xi_4')^2,$$

so besteht Borns Starrheitsbedingung darin, daß  $\epsilon^2$  von  $\tau$  unabhängig sein soll.

Man hat nun aus den aufgeführten Gleichungen, wenn

$$(44) \quad A_\alpha = \frac{1}{V^2} \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha} \frac{d x_i}{d \tau}; \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

gesetzt wird, im Grenzübergang

$$(45) \quad \Delta \tau = \sum_\alpha A_\alpha \Delta \xi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

$$(46) \quad \varepsilon^2 = \sum_{\alpha, \beta} p_{\alpha, \beta} \Delta \xi_{\alpha} \Delta \xi_{\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4,$$

wobei

$$(47) \quad p_{\alpha, \beta} = \sum_{\kappa} \left( \frac{\partial x_{\kappa}}{\partial \xi_{\alpha}} + A_{\alpha} \frac{dx_{\kappa}}{d\tau} \right) \left( \frac{\partial x_{\kappa}}{\partial \xi_{\beta}} + A_{\beta} \frac{dx_{\kappa}}{d\tau} \right)$$

ist, und Borns Bedingungsgleichungen sind

$$(48) \quad \frac{dp_{\alpha, \beta}}{d\tau} = 0. \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4.$$

In Borns Theorie handelt es sich um sechs Gleichungen zwischen zwölf, hier um zehn Gleichungen zwischen zwanzig Differentialquotienten, so daß dort sechs Differentialquotienten, hier zehn frei sind. Born hat die  $p_{\alpha, \beta}$  für seinen Fall durch Matrizenoperationen bestimmt und die Bedingungsgleichungen für besondere Aufgaben berechnet. In Minkowskis Schema können diese Bedingungsgleichungen allgemein entwickelt werden. Wir nehmen für die  $\xi$  die  $x$  und für die  $x$  die  $x + g d\tau$ , dann ist in der Eulerschen Form

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{p_{x_1} + g_1 d\tau, \quad p_{x_2} + g_2 d\tau, \quad p_{x_3} + g_3 d\tau, \quad p_{x_4} + g_4 d\tau - p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3}, p_{x_4}}{d\tau},$$

und man erhält

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp_{\alpha, \beta}}{d\tau} &= \sum_{\kappa} \left( \frac{\partial x_{\kappa}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{V^2} \frac{dx_{\kappa}}{d\tau} \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{dx_i}{d\tau} \right) \left[ \frac{\partial g_{\kappa}}{\partial x_{\beta}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{V^2} \frac{dg_{\kappa}}{d\tau} \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x_{\beta}} \frac{dx_i}{d\tau} + \frac{1}{V^2} \frac{dx_{\kappa}}{d\tau} \sum_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_{\beta}} \frac{dg_i}{d\tau} + \frac{dx_i}{d\tau} \frac{\partial g_i}{\partial x_{\beta}} \right) \right] \\ &\quad + \sum_{\kappa} \left( \frac{\partial x_{\kappa}}{\partial x_{\beta}} + \frac{1}{V^2} \frac{dx_{\kappa}}{d\tau} \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x_{\beta}} \frac{dx_i}{d\tau} \right) \left[ \frac{\partial g_{\kappa}}{\partial x_{\alpha}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{V^2} \frac{dg_{\kappa}}{d\tau} \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{dx_i}{d\tau} + \frac{1}{V^2} \frac{dx_{\kappa}}{d\tau} \sum_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{dg_i}{d\tau} + \frac{dx_i}{d\tau} \frac{\partial g_i}{\partial x_{\alpha}} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Beachtet man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_l}{\partial x_m} &= 1, \quad l = m; \quad \frac{\partial x_l}{\partial x_m} = 0, \quad l \neq m; \quad \sum_i \frac{dx_i}{d\tau} \frac{\partial g_i}{\partial x_m} = 0; \\ \sum_i \frac{dx_i}{d\tau} \frac{dg_i}{d\tau} &= 0; \quad \sum_i \left( \frac{dx_i}{d\tau} \right)^2 = -V^2, \end{aligned}$$

so folgt nach einigen Zwischenrechnungen

$$(50) \quad \frac{d p_{\alpha, \beta}}{d \tau} = \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{V^2} \frac{d}{d \tau} (g_{\alpha} g_{\beta}) = 0; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4.$$

Hiernach hat man die zehn Gleichungen — vier Dilations-, sechs Rotationsgleichungen —

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{1}{V^2} \frac{d g_1^2}{d \tau} = 0, \quad 2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{1}{V^2} \frac{d g_2^2}{d \tau} = 0, \\ 2 \frac{\partial g_3}{\partial x_3} + \frac{1}{V^2} \frac{d g_3^2}{d \tau} = 0, \quad 2 \frac{\partial g_4}{\partial x_4} + \frac{1}{V^2} \frac{d g_4^2}{d \tau} = 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \frac{1}{V^2} \frac{d}{d \tau} (g_1 g_2) = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_3} + \frac{\partial g_3}{\partial x_1} + \frac{1}{V^2} \frac{d}{d \tau} (g_1 g_3) = 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_4} + \frac{\partial g_4}{\partial x_1} + \frac{1}{V^2} \frac{d}{d \tau} (g_1 g_4) = 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_3} + \frac{\partial g_3}{\partial x_2} + \frac{1}{V^2} \frac{d}{d \tau} (g_2 g_3) = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_4} + \frac{\partial g_4}{\partial x_2} + \frac{1}{V^2} \frac{d}{d \tau} (g_2 g_4) = 0, \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_4} + \frac{\partial g_4}{\partial x_3} + \frac{1}{V^2} \frac{d}{d \tau} (g_3 g_4) = 0, \end{array} \right.$$

als Ausdruck von Borns Starrheitsbedingungen im Sinne der vollständigen Minkowskischen Theorie. Die vier ersten Bedingungen geben

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} + \frac{\partial g_4}{\partial x_4} = 0.$$

Die Bedingungen schließen also die Inkompressibilität ein, die Born aus seiner Rechnungsart für einen besonderen Fall erweisen konnte. Setzt man ferner, um zur klassischen Mechanik zu gelangen,  $V = \infty$ , so gehen die obigen Gleichungen in die sechs Gleichungen über

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial g_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} + \frac{\partial g_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_3} + \frac{\partial g_3}{\partial x_2} = 0,$$

das sind die bekannten Starrheitsbedingungen dieser Mechanik, die also der Bornschen allgemeinen Bedingung genügen.

Unabhängig von Herglotz, wie dieser die Bornsche Starrheitsbedingung als Festsetzung des stets gleichen Abstandes der Weltlinien voneinander auffassend, hat Nöther eine Formel abgeleitet

$$(52) \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{V^2} \tau \frac{d \tau}{d \tau} = 0,$$



wo  $r$  die Geschwindigkeit in der beliebig zu wählenden Richtung  $r$  angibt.

Nennt man  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  die Richtungskosinus von  $r$  und beachtet die auch von Nöther benutzten Beziehungen

$$r = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \alpha_4 g_4, \quad \frac{dr}{d\tau} = \alpha_1 \frac{dg_1}{d\tau} + \alpha_2 \frac{dg_2}{d\tau} + \alpha_3 \frac{dg_3}{d\tau} + \alpha_4 \frac{dg_4}{d\tau},$$

so läßt sich nach einiger Rechnung die Nöthersche Gleichung überführen in die Form

$$(53) \quad \begin{cases} \alpha_1^2 p_{11} + \alpha_2^2 p_{22} + \alpha_3^2 p_{33} + \alpha_4^2 p_{44} + \alpha_1 \alpha_2 p_{12} + \alpha_1 \alpha_3 p_{13} \\ + \alpha_1 \alpha_4 p_{14} + \alpha_2 \alpha_3 p_{23} + \alpha_2 \alpha_4 p_{24} + \alpha_3 \alpha_4 p_{34} = 0; \\ p_{\alpha\beta} = \frac{dp_{\alpha\beta}}{d\tau}, \end{cases}$$

und indem man die  $\alpha$  passend wählt, bekommt man die zehn hier abgeleiteten Gleichungen (51). Aber umgekehrt vermag man aus diesen zehn Gleichungen die Nöthersche allgemeine Gleichung nur formal abzuleiten, während sie sachlich nur für die Dilatation das gleiche gibt. Multipliziert man nämlich unsere zehn Gleichungen mit  $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, \alpha_4^2, \alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_3, \alpha_1 \alpha_4, \alpha_2 \alpha_3, \alpha_2 \alpha_4, \alpha_3 \alpha_4$  und addiert, so folgt nach einiger Zwischenrechnung

$$(54) \quad \alpha_1 \frac{\partial r}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial r}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial r}{\partial x_3} + \alpha_4 \frac{\partial r}{\partial x_4} + \frac{1}{V^2} r \frac{\partial r}{\partial \tau} = 0.$$

Formal bekommt man also Nöthers Formel, wenn man z. B.  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$  setzt und  $x_1$  mit  $r$  vertauscht, das gibt aber in der Tat sachlich nur die Dilatationsgleichungen. Hieraus möchte ich schließen, daß die Bornsche Definition die starren Körper mehr beschränkt als die Herglotz-Nöthersche, also die zutreffendere ist; von der Herglotz-Nötherschen kann man zu den aus der Bornschen Theorie fließenden Gleichungen gelangen, von der Bornschen aber nicht zu der allgemeinen Nötherschen Gleichung.

Die zehn Bedingungsleichungen (51) lassen sich unter Benutzung der Minkowskischen Beziehungen in eigenartige Verbindung miteinander bringen. Definiert man wie in der klassischen Mechanik  $d/d\tau$  allgemein durch

$$\partial/\partial\tau + g_1 \partial/\partial x_1 + g_2 \partial/\partial x_2 + g_3 \partial/\partial x_3 + g_4 \partial/\partial x_4$$



und setzt zur weiteren Abkürzung

$$\frac{dp}{d\tau} = p,$$

so folgt aus einer einfachen, wenn auch längeren, Rechnung das sehr übersichtlich gebaute System der drei Gleichungen

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} g_1 g_2 p_{12} + g_1^2 p_{11} + g_2^2 p_{22} - \frac{1}{2} \left( g_1 \frac{\partial g_1}{\partial \tau} + g_2 \frac{\partial g_2}{\partial \tau} \right) \\ = g_3 g_4 p_{34} + g_3^2 p_{33} + g_4^2 p_{44} - \frac{1}{2} \left( g_3 \frac{\partial g_3}{\partial \tau} + g_4 \frac{\partial g_4}{\partial \tau} \right), \\ g_1 g_3 p_{13} + g_1^2 p_{11} + g_3^2 p_{33} - \frac{1}{2} \left( g_1 \frac{\partial g_1}{\partial \tau} + g_3 \frac{\partial g_3}{\partial \tau} \right) \\ = g_2 g_4 p_{24} + g_2^2 p_{22} + g_4^2 p_{44} - \frac{1}{2} \left( g_2 \frac{\partial g_2}{\partial \tau} + g_4 \frac{\partial g_4}{\partial \tau} \right), \\ g_1 g_4 p_{14} + g_1^2 p_{11} + g_4^2 p_{44} - \frac{1}{2} \left( g_1 \frac{\partial g_1}{\partial \tau} + g_4 \frac{\partial g_4}{\partial \tau} \right) \\ = g_2 g_3 p_{23} + g_2^2 p_{22} + g_3^2 p_{33} - \frac{1}{2} \left( g_2 \frac{\partial g_2}{\partial \tau} + g_3 \frac{\partial g_3}{\partial \tau} \right). \end{aligned} \right.$$

In dem hier wesentlich in Betracht kommenden Fall, daß von der Eigenzeit allein abhängige Beschleunigungen nicht vorhanden sind, so daß man jede Größe als nur von den Koordinaten bestimmt ansehen darf, hat man

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} g_1 g_2 p_{12} + g_1^2 p_{11} + g_2^2 p_{22} &= g_3 g_4 p_{34} + g_3^2 p_{33} + g_4^2 p_{44}, \\ g_1 g_3 p_{13} + g_1^2 p_{11} + g_3^2 p_{33} &= g_2 g_4 p_{24} + g_2^2 p_{22} + g_4^2 p_{44}, \\ g_1 g_4 p_{14} + g_1^2 p_{11} + g_4^2 p_{44} &= g_2 g_3 p_{23} + g_2^2 p_{22} + g_3^2 p_{33}. \end{aligned} \right.$$

Hiernach sind von den zehn Bedingungsgleichungen (51) nur sieben voneinander unabhängig, drei sind erledigt, wenn die anderen erfüllt sind.

So hat man insbesondere, wenn die vier Dilatationsgleichungen sich erfüllt zeigen, zwischen den sechs Rotationsgleichungen die Beziehungen

$$(57) \quad g_1 g_2 p_{12} = g_3 g_4 p_{34}, \quad g_1 g_3 p_{13} = g_2 g_4 p_{24}, \quad g_1 g_4 p_{14} = g_2 g_3 p_{23}.$$

Der Symmetrie halber wird man allgemein die sechs Rotationsgleichungen ansetzen und als siebente Gleichung die Inkompressibilitätsbedingung hinzuzufügen, die Dilatationsgleichungen können dann ausscheiden. Diese Betrachtung ist der Raumzeitmechanik allein eigen, auf die klassische Mechanik läßt sie sich nicht übertragen, wie schon der Anblick der Verbindungsgleichungen (55) usf. zeigt. Alles das gilt auch für

die früher behandelten „eigenstarren“ Systeme mit den entsprechenden Bedingungsgleichungen (38) usf., worauf schon ohne Beweis hingewiesen ist.

Es ist nun von Interesse zu entscheiden, wie sich die hier definierten eigenstarren Systeme zu den Bornschen starren Systemen verhalten. Die Bedingungsgleichungen unterscheiden sich durch die Glieder  $d(g_\alpha g_\beta)/d\tau$ . Die den Beziehungen der klassischen Mechanik starrer Systeme entsprechenden Beziehungen (38) für eigenstarre Systeme der Minkowskischen Mechanik verlangen hiernach, daß in Borns Gleichungen  $d(g_\alpha g_\beta)/d\tau = 0$  sein soll. Nach (38) haben wir so

$$\frac{da_{\alpha\alpha}}{d\tau} + \sum_i g_i a_{\alpha i} + \sum_i x_i \frac{da_{\alpha i}}{d\tau} = 0; \quad i, \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Diese Gleichungen nun sollen auf das ganze System von Punkten sich beziehen, also für die verschiedensten Werte der Koordinaten auch bei gleicher Eigenzeit gelten. Also bekommt man nach Einsetzung der Werte für die  $g$  die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \sum_i a_{\alpha i} a_i + \frac{da_{\alpha\alpha}}{d\tau} &= 0, \\ \sum_i a_{\alpha i} a_{li} + \frac{da_{\alpha l}}{d\tau} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad i, \alpha, l = 1, 2, 3, 4.$$

Vertauscht man im zweiten System  $\alpha$  mit  $l$  und beachtet, daß  $a_{li} a_{i\alpha} = a_{li} a_{\alpha i}$  ist, während  $a_{\alpha l} = -a_{l\alpha}$  wird, so folgt, daß  $da_{\alpha l}/d\tau = 0$  sein muß, und da die  $a_{\alpha\alpha} = 0$  sind, so gibt dieses System die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{41}^2 &= 0, & a_{13} a_{32} + a_{14} a_{42} &= 0, & a_{32} a_{21} + a_{34} a_{41} &= 0, \\ a_{32}^2 + a_{42}^2 + a_{12}^2 &= 0, & a_{24} a_{43} + a_{21} a_{13} &= 0, & a_{43} a_{32} + a_{41} a_{12} &= 0, \\ a_{43}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 &= 0, & a_{31} a_{14} + a_{32} a_{24} &= 0, & a_{13} a_{24} + a_{12} a_{23} &= 0, \\ a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ganz abgesehen davon, daß die sechs Größen um vier Gleichungen überbestimmt sind, lehren die ersten vier Gleichungen, daß es nicht möglich ist zu reellen Bewegungen zu gelangen. Sollen nämlich  $g_1, g_2, g_3, \frac{1}{i}g_4$  reell sein, so müssen die  $a_{\alpha 4}, a_{4\alpha}$  sich imaginär darstellen. Alsdann folgt aus den letzten der vier genannten Gleichungen, daß diese Größen überhaupt fortfallen, und deshalb aus den drei anderen dieser vier

Gleichungen, daß überhaupt alle  $a_{ni} = 0$  sind. Und da alsdann auch  $da_n/d\tau = 0$  ist, so ergibt sich, daß bei Festhaltung von Borns Starrheitsbedingung Rotationen nach dem erweiterten Schema der klassischen Mechanik überhaupt nicht möglich sind, und Translationen, nur soweit sie eigenzeitlich gleichförmig vor sich gehen. Denkt man nun daran, daß dieses Ergebnis durch Glieder in den Bornschen Starrheitsbedingungen herbeigeführt sind, die unter normalen Verhältnissen doch nur als *Korrekturen* bei Übergang von der dreidimensionalen-klassischen Mechanik zur vierdimensionalen Minkowskischen Relativitätsmechanik wirken sollen, während ihr Einfluß auf das Ergebnis, ganz unabhängig von ihrem praktischen Betrage, unbedingt ist, so wird man in dieser Folgerung, das der klassischen Mechanik völlig zuwider läuft, ein sehr schweres Bedenken gegen die Bornsche Starrheitsbedingung in der Relativitätsmechanik sehen müssen. Laue hat sich, wie bemerkt, gegen die Einführung „starrer“ Systeme in diese Mechanik überhaupt ausgesprochen. Im Grunde stimme ich ihm vollständig bei, da, wie schon hervorgehoben, die Minkowskische Mechanik eine alle Punkte verbindende Größe überhaupt leugnet, was eben im Begriff der *Eigenzeit* liegt. Und das gilt für irgendwelche Systeme, nicht bloß für starre. Aber wenn man schon Beziehungen aufstellen will, die, wie Herglotz es auffaßt, die Bewegung aller Punkte eines Systems aus der Bewegung eines oder mehrerer Punkte ermitteln läßt, so sollten diese Beziehungen doch so sein, daß man von ihnen immer zu entsprechenden Beziehungen der klassischen Mechanik übergehen kann. Wenigstens scheint mir das das richtige zu sein, da doch die klassische Mechanik sich praktisch als durchaus brauchbar erwiesen hat. Hält man diesen Gesichtspunkt fest, so wird man wohl geneigt sein, die starren Systeme so zu definieren, wie hier für die eigenstarrten geschehen ist, was sich als Erweiterung der Lagrangeschen Definition der Starrheit in der klassischen Mechanik herausgestellt hat. Diese Definition ist hier eine bestimmte, weil die Determinante der Rotationskoeffizienten  $a_{ni}$ , nämlich

$$(58) \quad |a_{ni}| = (a_{12}a_{43} + a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2$$

nur verschwindet, wenn  $a_{12}a_{43} + a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0$  sein

sollte, was nur in besonderen Fällen stattfinden könnte. Die sechs Größen  $a_{\alpha i}$  entsprechen dann den sechs Größen, durch die die Drehung eines Koordinatensystemes im Raumzeitgebiet gegen ein anderes bestimmt ist. Reduktionsformeln mittels Winkel, welche den von Lagrange für die Behandlung der Rotation von Systemen eingeführten entsprechen, nur daß es sechs statt drei sind, habe ich an anderer Stelle aufgestellt. Abschreckend wirkt nur die Länge der Formeln.

8. Hier sei zum Schluß nur noch gezeigt, daß die Lagrangesche Form der Kontinuitätsbedingung neben der von Minkowski angegebenen Eulerschen in der Raumzeitmechanik gleichfalls gilt. Innerhalb seiner Berechnungsweise hat Born einen solchen Nachweis bereits geliefert. Setzt man die Funktionsdeterminante

$$(59) \quad \left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha} \right| = D; \quad \alpha, i = 1, 2, 3, 4,$$

so wird

$$\frac{dD}{d\tau} = \frac{D\xi = x + g d\tau - D\xi = x}{d\tau}.$$

Die Ausrechnung ergibt mit den Bezeichnungen

$$(60) \quad G = \left| \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \right|; \quad i, \alpha = 1, 2, 3, 4$$

und  $U_{\alpha\beta}^{(3)}$ ,  $U_{\alpha\beta}^{(2)}$  für diejenigen Unterdeterminanten dritter und zweiter Ordnung von der Determinante  $G$ , welche die Diagonalglieder als solche behalten, wobei die unteren Indizes die bei der Bildung fortzulassenden Reihen feststellen,

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} D\xi = x + g d\tau &= D\xi = x + G d\tau^4 + (U_1^{(3)} + U_2^{(3)} + U_3^{(3)} + U_4^{(3)}) d\tau^3 \\ &+ (U_{12}^{(2)} + U_{13}^{(2)} + U_{14}^{(2)} + U_{23}^{(2)} + U_{24}^{(2)} + U_{34}^{(2)}) d\tau^2 \\ &+ \left( \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} + \frac{\partial g_4}{\partial x_4} \right) d\tau. \end{aligned} \right.$$

Beim Übergang zur Grenze hat man

$$(62) \quad \frac{dD}{d\tau} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} + \frac{\partial g_4}{\partial x_4},$$

was den Beweis erledigt.

(Eingegangen Ende Dezember 1913.)

7. *Über die Frage, ob die Kanalstrahlen bei der  
Lichterregung Bewegungsenergie übertragen;  
von W. Wien.*

Die bisherigen Versuche, Geschwindigkeitsänderungen auf dem Wege der Kanalstrahlen nachzuweisen, haben ein negatives Ergebnis gehabt. Es ließ sich keine Verringerung der Geschwindigkeit auf der Bahn der Kanalstrahlen nachweisen. Daraus folgt, daß auch nur eine geringe Übertragung von lebendiger Kraft auf ruhende Gasmoleküle stattfindet von solchen Kanalstrahl-Atomen, die nicht absorbiert werden.

Es schien mir daher notwendig, eine möglichst empfindliche Methode anzuwenden, um zu untersuchen, ob eine Übertragung von Geschwindigkeit stattfindet, wenn ruhende Gasmoleküle von fliegenden zum Leuchten erregt werden, weil hierbei jedenfalls ein stoßartiger Vorgang stattfindet. Ich habe zu diesem Zwecke die große Dispersion des Stufengitters benutzt, um zu sehen, ob die von ruhenden Atomen ausgesandten Spektrallinien bei Erregung durch Kanalstrahlen eine Verbreiterung zeigen, wie sie nach dem Dopplerschen Prinzip auch bei kleinen Geschwindigkeitsänderungen zu erwarten ist.

Um die Störungen durch den gewöhnlichen Dopplereffekt zu vermeiden, kamen drei verschiedene Wege in Betracht:

1. Erregung eines nur im Beobachtungsraum befindlichen Gases durch ein anderes, wobei der Dopplereffekt fortfällt.
2. Benutzung eines Gases, das den Dopplereffekt sehr schwach zeigt.
3. Spektrale Abtrennung des Dopplerstreifens.

Von den drei Wegen erwies sich der dritte als nicht gangbar, weil eine so genaue Abtrennung des Dopplerstreifens nicht gelang, wie sie für das Stufengitter erforderlich war.

Für die erste Methode wurde Quecksilber gewählt, das durch Wasserstoff, Stickstoff und Jodkanalstrahlen zum Leuchten gebracht wurde.

Beobachtet wurde die grüne Hg-Linie.

Für die zweite Methode benutzte ich die gelbe Heliumlinie, bei der der Dopplereffekt sehr schwach ist und nicht stört.

Ich will schon im voraus aussprechen, daß die Versuche ein durchaus negatives Ergebnis hatten. Bei keinem Versuch zeigte sich eine Verbreiterung der Linie im Stufengitter gegenüber der Anregung im Lichtbogen oder in der positiven Säule.

Während der Versuche erschien eine Arbeit von J. Stark<sup>1)</sup>, der eine solche Übertragung von Geschwindigkeit an der Aluminiumlinie aus seinen Photogrammen entnimmt.

Ich will gleich bemerken, daß die von mir angewandte Methode nur zu zeigen vermag, daß eine Geschwindigkeitsübertragung bei dem überwiegenden Teil der durch Kanalstrahlen zum Leuchten gebrachten Atome nicht anders als zu einem sehr geringen Bruchteile erfolgen kann. Ob ein kleiner Teil größere Dopplerverschiebungen zeigt, die dann sehr lichtschwach sein würden, kann natürlich nicht entschieden werden. Die Möglichkeit, daß zwei Erregungsvorgänge sich übereinander lagern, von denen einer mit der Übertragung von Bewegungsenergie verbunden ist, der andere nicht, kann durch diese Versuche nicht ausgeschlossen werden. Auch beziehen sich meine Versuche nur auf eine geringe Zahl von Spektrallinien, so daß die Möglichkeit, daß andere Linien sich anders verhalten, bestehen bleibt.

#### 1. Versuchsanordnung.

Die für die Quecksilbererregung benutzte Röhre zeigt Fig. 1. Das Gefäß  $G_2$  ist mit Quecksilber gefüllt, das leicht erwärmt wird.  $G_1$  taucht in flüssige Luft, wo sich der Quecksilberdampf kondensiert. In die Entladungsröhre gelangten dabei keine merklichen Spuren von Quecksilber.

Das Stufengitter von 28 Platten wurde auf einen Kirchhoffschen Spektralapparat gesetzt, und zwar so, daß die Ablenkung in vertikaler Richtung erfolgte. Unmittelbar vor dem Stufengitter stand ein Prisma, das das Licht horizontal dispersierte. Der Spalt des Kollimators verlief horizontal. Die

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 42. p. 163. 1913.

Abtrennung der einzelnen Linien erfolgte durch eine vor dem Spalt verschiebbare keilförmige Blende.

Bei der Quecksilberlinie erschienen die Trabanten der Linie sehr deutlich, während bei der photographischen Aufnahme hauptsächlich nur der eine etwas entferntere Trabant der Hauptlinie sich scharf abhob. Bei der gelben Heliumlinie zeigte sich die bekannte Nebenlinie. Die Orientierung des Gitters war so, daß zwei benachbarte Ordnungen gleiche Helligkeit hatten.

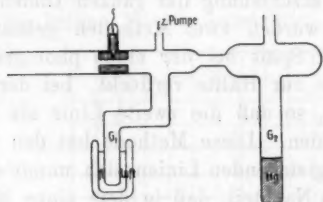


Fig. 1.

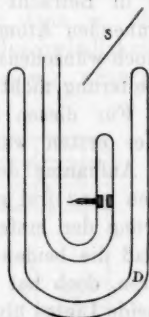


Fig. 2.

Da das Stufengitter sehr empfindlich für Temperaturschwankungen ist, wurde es in einen Kasten aus Zinkblech gesetzt, der von Wasser durchströmt wurde, das durch einen Thermostaten auf konstante Temperatur gebracht war. So konnten auch längere Expositionen für die photographischen Aufnahmen gemacht werden.

Für die Aufnahmen mit Jodkanalstrahlen wurde Jod in eine Seitenröhre der Entladungsröhre gebracht und durch Kohlensäure und Aceton so gekühlt, daß die richtige Dampfspannung erhalten wurde.

Für die Heliumaufnahmen diente ein gewöhnliches Kanalstrahlenrohr. Das Helium war der von Hrn. Rau hergestellten Anordnung zur Darstellung von reinem Helium entnommen. Für die Versuche in flüssiger Luft wurde die Anordnung Fig. 2 gewählt. Die Kanalstrahlröhre war umgebogen und konnte in ein Dewarsches Gefäß *D* gesenkt werden. Die vertikal austretenden Kanalstrahlen wurden durch einen Spiegel *S* horizontal reflektiert.



Die Dispersion des Stufengitters konnte leicht aus der von Hilger angegebenen Konstanten berechnet werden. Sie unterscheidet sich sehr wenig von den von Janicki<sup>1)</sup> angegebenen Werten.

Obwohl eine merkliche Geschwindigkeitsübertragung sich nicht gut anders als in einer Verbreiterung der Linien zeigen kann, da in den Kanalstrahlen verschiedene Geschwindigkeiten enthalten sind, also selbst in dem Falle, daß nur zentrale Stöße in Betracht kommen, verschiedene Geschwindigkeiten den ruhenden Atomen mitgeteilt werden müssen, so schien es mir doch wünschenswert zu untersuchen, ob beim Fehlen einer Verbreiterung nicht eine Verschiebung der ganzen Linien eintritt. Für diesen Zweck wurden zwei Methoden gebraucht. Bei der ersten wurde der Spalt bei der einen photographischen Aufnahme der Linie zur Hälfte verdeckt, bei der anderen ganz frei gelassen, so daß die zweite Linie als Verlängerung der ersten erschien. Diese Methode hat den Vorteil, daß die beiden zu vergleichenden Linien sich unmittelbar berühren, doch hat sie den Nachteil, daß in dem einen Felde sich beide Linien übereinander lagern. Außerdem wurde in gewöhnlicher Weise das Licht der einen Lichtquelle durch ein total reflektierendes Prisma auf die eine Hälfte des Spalts geworfen, so daß die Linien beider Lichtquellen ganz getrennt sind.

#### Ergebnisse.

Ich teile von den zahlreichen Beobachtungen nur einige mit, da sie sämtlich im Ergebnis übereinstimmen.

Von den photographischen Aufnahmen der Linien sind die Schwärzungen mit dem Hartmannschen Mikrophotometer ausgemessen. Die Linienbreite gestattete noch gerade die Messung mit der erforderlichen Genauigkeit.

Für die grüne Hg-Linie  $\lambda = 5461 \text{ \AA.-E.}$  ist der Abstand zweier Ordnungen  $= 0,476 \text{ \AA.-E.}$

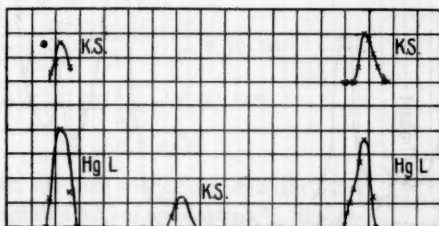
Auf den Figuren entspricht daher 1 Skalenteil  $0,106 \text{ \AA.-E.}$ , was auch ungefähr dem fünffachen des Auflösungsvermögens des Gitters entspricht.

1) L. Janicki, Ann. d. Phys. 19. p. 36. 1906.



Man kann hieran leicht erkennen, welche Verbreiterungen der Linien sich noch hätten bemerkbar machen müssen.

Die zu erwartenden Verbreiterungen, wenn eine Geschwindigkeitsübertragung stattfände, hängen natürlich von der Art des Stoßes ab. Sie würden bei elastischen Stößen am größten sein müssen. Da aber bei größeren Geschwindigkeiten keine Reflexion der Kanalstrahlen an festen Körpern zu bemerken ist, so werden solche Zusammenstöße zwischen Kanalstrahlen und ruhenden Atomen, die zur Absorption führen, eher als unelastische Stöße anzusehen sein. Ist dann  $v_1$  die Geschwindigkeit des Kanalstrahles,  $v$  die Geschwindigkeit nach dem Zusammenstoß, so ist  $v = v_1 m_1 / (m_1 + m_2)$ , wenn  $m_1$  und  $m_2$  die beiden Massen bezeichnen.



Grüne Hg-Linie von Wasserstoffkanalstrahlen erregt.

Spannung 26000 Volt.

Hauptlinie  $\lambda = 5461$ . 1 Skalenteil = 0,106 Å.-E.

Fig. 3.

Bei Wasserstoffkanalstrahlen ist die mögliche Linienverbreiterung klein. Bei einer Spannung von 26000 Volt ist die beschleunigende Spannung für das Intensitätsmaximum der Kanalstrahlen ungefähr 13000 Volt, so daß

$$v_1 = 1,58 \cdot 10^8$$

ist.

Hieraus ergibt sich für Quecksilber

$$v = \frac{1,58 \cdot 10^8}{201} = 7,86,$$

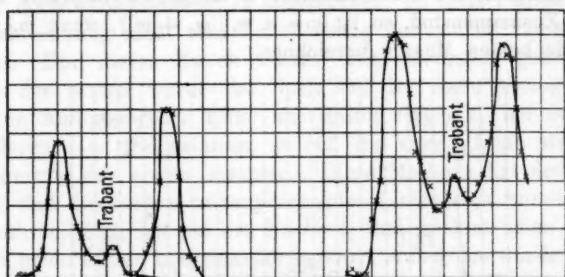
und die Verbreiterung

$$\delta\lambda = \frac{v}{c} \lambda = 0,143 \text{ Å.-E.} \quad \lambda = 5461.$$

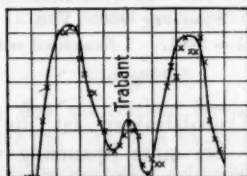
In Fig. 3 sind einige Beobachtungen dargestellt.

Die von den Wasserstoffkanalstrahlen erregte Linie ist mit *KS* bezeichnet. Als Vergleichslichtquelle diente eine Hg-Bogenlampe für niedrigen Druck, die mit schwachem Strom betrieben wurde. Die Linienbreite unterschied sich nicht von der in einer Geisslerschen Röhre.

Nimmt man als Grenze für einen beobachtbaren Unterschied in der Linienbreite  $0,042 \text{ \AA.-E.}$ , so würde der vierte Teil der zu erwartenden Verbreiterung noch gerade merklich gewesen sein. Doch liegen die Verhältnisse bei der Erregung von Hg durch H besonders ungünstig.



Grüne Hg-Linie von N-Kanalstrahlen erregt. Spannung 26 000 Volt.



Hg-Lampe.

1 Skalenteil =  $0,106 \text{ \AA.-E.}$

Fig. 4.

Wie man sieht, sind die Linien der Kanalstrahlen und der Hg-Lampe auch nicht gegeneinander verschoben.

Günstiger liegen die Verhältnisse für die Anregung der Quecksilberlinie durch Stickstoff. Da hier der von der Hauptlinie entfernteste Traband sehr scharf hervortrat, wurde dieser für die Beobachtung gewählt.

Bei der Vergleichslinie der Bogenlampe erscheinen die

Hauptlinien der benachbarten Ordnungen durch stärkere Exposition der übrigen Trabanten breiter.

Man sieht in Fig. 4 keinen Unterschied in der Breite des Trabanten der Kanalstrahlen und der Hg-Lampe. Da wir hier die Beobachtungsgrenze bei  $0,0212 \text{ \AA.-E.}$  ansetzen können und aus der beschleunigenden Spannung von  $13000 \text{ Volt}$   $v_1 = 4,31 \cdot 10^7$ ,  $v = (14/214) v_1 = 2,84 \cdot 10^6$  sich ergibt und die mögliche Verbreiterung  $\delta\lambda = 0,516 \text{ \AA.-E.}$ , so kann man sagen, daß die tatsächliche Geschwindigkeitsübertragung nicht mehr als 2 Proz. der bei unelastischem Stoß zu erwartenden beträgt.

Bei Jod (Fig. 5) ist

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 13000 \cdot 10^{12}}{127}} = 1,57 \cdot 10^7,$$

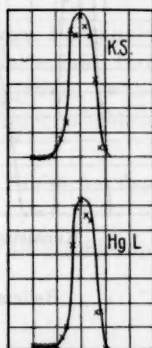
$$v = 1,57 \cdot 10^7 \frac{127}{327} = 6,09 \cdot 10^6$$

$$\delta\lambda = 1,1 \text{ \AA.-E.}$$

Nehmen wir hier wieder an, daß die Linie der Kanalstrahlen bis auf mindestens  $\frac{1}{2}$  Skalenteil mit der der Hg-Lampe übereinstimmt, so würde auch hier folgen, daß die Geschwindigkeitsübertragung kleiner ist als 2 Proz. der zu erwartenden.

Bei der gelben Heliumlinie fällt zunächst auf, daß die Nebenlinie, die von der Hauptlinie  $0,355 \text{ \AA.-E.}$  entfernt ist, erheblich schmäler ist als die Hauptlinie. Dies konnte auch besonders noch durch okulare Beobachtung bestätigt werden.

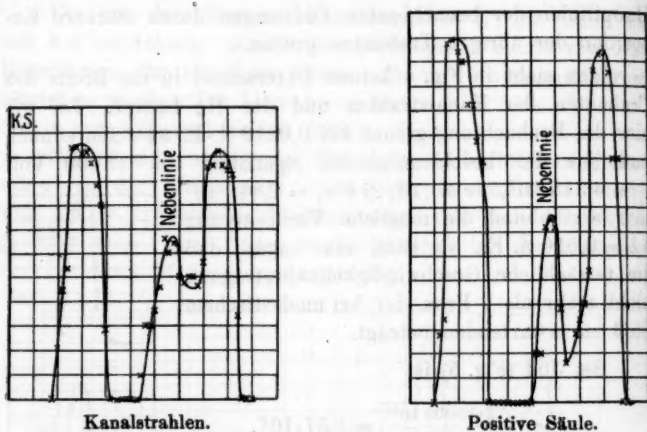
Dies Verhalten zeigt sich in ganz gleicher Weise bei der Erregung durch Kanalstrahlen oder in der positiven Lichtsäule. Es steht in einem gewissen Gegensatz zu den Beobachtungen von Buisson und Fabry<sup>1)</sup> die ergeben haben, daß die Heliumlinie 5876 eine Interferenzfähigkeit hat, die sich aus der Molekularbewegung nach dem Dopplerschen Prinzip ergibt. Es ist allerdings nicht von ihnen angegeben, ob sie



Hg-Linie 5461 von Jodkanalstrahlen erregt. 1 Skalenteil =  $0,106 \text{ \AA.-E.}$   
Spannung  $26000 \text{ Volt.}$

Fig. 5.

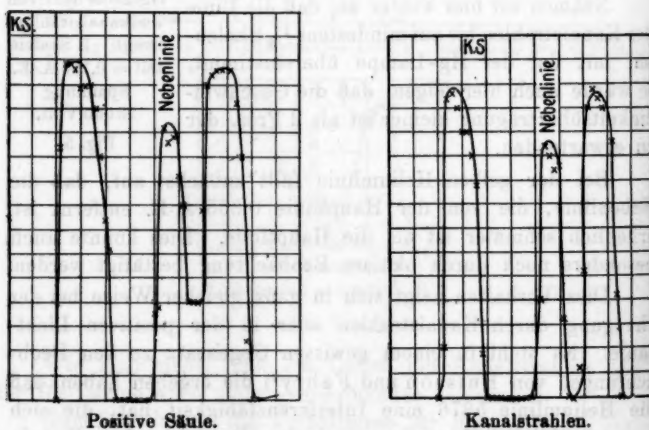
1) H. Buisson u. C. Fabry, Journ. de phys. 2. p. 442. 1912.



Spannung 11000 Volt.

Heliumlinie  $\lambda = 5876 \text{ \AA.-E.}$  bei Zimmertemperatur.

Fig. 6.



Skalenteil =  $0,0935 \text{ \AA.-E.}$

Heliumlinie  $\lambda = 5876 \text{ \AA.-E.}$  Röhre in flüssiger Luft.

Spannung 11000 Volt.

Fig. 7.

die Hauptlinie oder die Nebenlinie beobachtet haben. Jedenfalls müßten beide Linien gleiche Breite haben, wenn sie von denselben Zentren emittiert werden, falls wirklich die Breite nur durch die Molekularbewegung bestimmt wird. Diese Frage soll in einer besonderen Untersuchung mit Hilfe des Interferenzspektroskops von Perot und Fabry weiter verfolgt werden.

Ein weiteres bemerkenswertes Verhalten der Nebenlinie zeigt sich in flüssiger Luft, in der die Nebenlinie fast gleiche Maximalintensität besitzt wie die Hauptlinie, während bei gewöhnlicher Temperatur die Hauptlinie erheblich stärker ist.

Im übrigen zeigt die Nebenlinie gleiche Breite in den Kanalstrahlen und in der positiven Säule.

Aus der Spannung von 11 000 Volt (5500 Volt beschleunigende Spannung) berechnet sich

$$v = 2,62 \cdot 10^7,$$

$$\delta \lambda = 5,14 \text{ \AA.-E.}$$

Nehmen wir 0,2 Skalenteile als Grenze für die Beobachtung der Schärfe der Nebenlinie, so ist die übertragene Geschwindigkeit beim ganz unelastischen Stoß nicht größer als

$$0,36 \text{ Proz.}$$

Nach unseren bisherigen Kenntnissen der Kanalstrahlen müssen wir zwei Arten von Zusammenstößen unterscheiden, einmal die, welche mit einer Loslösung und Wiederaufnahme von Elektronen verbunden sind und deren freie Weglänge ich früher bestimmt habe; dann die Stöße, die die Absorption und wohl auch die Diffusion der Strahlen bedingen. Letztere sind, wie ich nachgewiesen habe, von ersteren quantitativ sehr verschieden. Die Stöße, welche die Absorption bedingen und daher die Geschwindigkeit der Kanalstrahlen vernichten, müssen notwendig die Geschwindigkeit auf die ruhenden Atome übertragen.

Man wird aus dem negativen Ergebnis der mitgeteilten Beobachtungen schließen, daß bei der Erregung der be-

obachteten Spektrallinien, wenigstens bei dem größten Teil der emittierten Strahlung, die Stöße wirksam sind, welche keine erhebliche Geschwindigkeitsübertragung bedingen. Es würde dies mit der Annahme übereinstimmen, daß die Zusammenstöße, welche die Umladung der Atome bedingen, auch die Lichtemission erregen.

(Eingegangen 23. Januar 1914.)

r  
e  
e  
-

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100